LUGAR GEOMÉTRICO DE UNA FUNCIÓN

Cruz López Lorenzo Bertín [1]

Resumen: En el presente artículo se detallará una parte tan básica y a la vez tan indispensable de las matemáticas, en particular el método para obtener la Gráfica de una función, requerimiento para tener claridad en el análisis de sistemas de control. Se mostrará como mediante el uso del método para graficar una función, combinado con otros para obtener, intersecciones, simetría geométrica, extensión, asíntotas se puede graficar una función, también se mostrará el proceso inverso, partiendo de un lugar geométrico y sus condiciones obtener su función. Este conocimiento sienta las bases para entender y dominar el análisis de Sistemas cuando se usa los métodos tradicionales como: el lugar geométrico de raíces, el método de Nyquist y las gráficas de Bode, que son utilizados para conocer el comportamiento y respuesta de los mismos a una entrada predeterminada.

Palabras clave: Coordenadas, Lugar geométrico, simetría, asíntotas.

Introducción

En el plan curricular de varias carreras de Ingeniería se incluyen materias en las que se utilizan en gran medida los conocimientos fundamentales de las ciencias básicas, dentro de esas están las matemáticas. En la carrera de Ingeniería Electrónica que se imparte en el Instituto Tecnológico de Tehuacán, se incluyen, entre otras, materias como Control I y II, Procesamiento Digital de Señales, Control Digital, Circuitos Eléctricos, Electrónica Analógica y Electrónica Digital, las cuales como tantas otras, en el proceso Enseñanza –Aprendizaje usan los conocimientos adquiridos durante los primeros semestres de la carrera y/o durante los cursos tomados en Bachillerato. Con la experiencia de años impartiendo estas materias de Ingeniería, se encuentra uno con que los estudiantes no tienen el conocimiento suficiente o simplemente no recuerdan estas bases matemáticas requeridas para entender y asimilar los conocimientos avanzados de ingeniería que se les transmiten en esas materias, por tal razón, he preparado e impartido varios apuntes sobre esas bases, la finalidad es proporcionar un recordatorio claro y entendible a los estudiantes para que asimilen correctamente las habilidades, proporcionadas por los libros de texto y el Maestro, usadas en el diseño de productos de ingeniería o en el análisis de sistemas de Control, Electrónicos, Mecánicos, Computacionales, Mecatrónicos, Bioelectrónicos y demás disciplinas que lo requieran. Aquí se presentan las bases para llegar a entender, dominar y utilizar el *Lugar Geométrico de Raíces* en el análisis y diseño de Sistemas de Control.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y LUGARES GEOMÉTRICOS
Existen dos problemas fundamentales de la Geometría Analítica

I. Dada una ecuación o función, construir su gráfica, es decir interpretación geométrica.
II. Dada una figura geométrica o las condiciones que deben satisfacer los puntos de la misma, obtener su ecuación o función.

1. **Primer problema fundamental. Gráfica de una ecuación o función** [3]

1. Dada una ecuación o función $f(x,y) = 0$ (1)

1. Docente de Ingeniería en Electrónica, Instituto Tecnológico de Tehuacán (ITTEH), 238 3803370, bcruz57@gmail.com

3. A partir de esta página usaremos las palabras ecuación o función indistintamente para referirnos a una función.
Ecuación. Declaración matemática en la que dos expresiones son iguales
Función. Relación matemática tal que cada elemento de un conjunto dado (dominio) es asociado con un elemento de otro conjunto (rango).

Tenemos un número infinito de valores reales x & y que satisfacen (1), cada par x y se toma como las coordenadas (x, y) de un punto en el plano XY. En este convenio se basan las siguientes definiciones:

Definición 1. El conjunto de los puntos, y sólo de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación o función (1) se llama *gráfica de la ecuación* o, bien, *lugar geométrico de la función.*

Definición 2. Cualquier punto que satisfaga la ecuación (1) *pertenece a la gráfica de la ecuación.*

Ejemplo. Consideremos la ecuación o función $y = x^3 - 8x^2 + 15x$ (2)

Dando valores a x y calculando y, obtenemos los valores de la tabla 1. Cada par de valores correspondientes, tomado como las coordenadas de un punto, nos permite trazar varios puntos, tal como se muestra en la figura 1.

Esto no siempre es así de evidente, ejemplo, dada la ecuación

Tabla 1. Valores xy de la ecuación (2)

X	Y
-1	-24
0	0
1	8
2	6
3	0
4	-4
5	0
6	8

$$x^2 + y^2 + 4 = 0 \qquad (3)$$

hallar su gráfica.

También se satisface con un número infinito de valores de x pero para y ninguno pertenece a los números reales. Veamos unos cuantos de ellos: Despejamos y

$$y = \sqrt{-x^2 - 4}$$

Con esta función calculamos los valores de y dando valores a x como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Valores de x y calculados para y en (3)

x	y
-2	-j2.828
-1	-j2.236
0	-j2.000
1	-j2.236
2	-j2.828

Como podemos ver las soluciones son números complejos y en este tratado sólo veremos números reales. Entonces decimos que la ecuación (3) no tiene gráfica en el sistema de coordenadas rectangulares real.

2. Intersección con los ejes.

Definición de la palabra Intersección. Encuentro de dos líneas que recíprocamente se cortan formando un punto en su cruce.

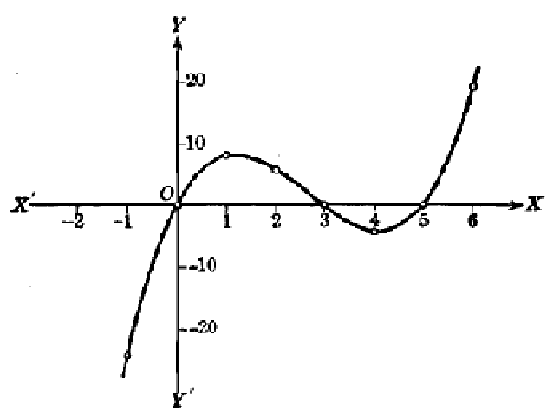


Figura 1. Gráfica de la función (2)

Definición. Intersección de una curva con el eje x es el punto de cruce de la curva con el eje x. Punto de intersección de la curva con el eje y, es la intersección de la misma con el eje y.

Esta definición nos proporciona la evidencia para obtener los puntos de intersección.

Para el eje x, hacemos y=0 en la ecuación de la curva, las soluciones reales de la ecuación resultante en x nos darán las intersecciones con el eje x.

Para el eje y, hacemos x=0 y del mismo modo obtenemos las intersecciones en el eje y.

Ejemplo: $y = x^3 - 8x^2 + 15x$ (1)

Damos a y el valor de cero, es decir y=0, entonces la ecuación (1) queda

$$x^3-8x^2+15x=0,\ factorizando,\ x(x^2-8x+15)=0,\ factorizando,\ x(x-3)(x-5)=0$$

Así, vemos que las raíces son: x=0, 3, 5. Entonces las intersecciones con el eje x, suceden en los puntos (0,0), (3,0), (5,0). Ahora si damos a x el valor de cero, es decir x=0, la ecuación (1) se reduce a y = 0 esto significa que la intersección con el eje y sucede en el punto (0,0). Todas estas intersecciones se muestran en la figura 1.

3. Simetría.

Veremos la simetría de curvas respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen.

Definición1. Dos *puntos simétricos con respecto a una recta*, si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

Eje de simetría. Recta con respecto a la cual son simétricos los dos puntos. Esto se muestra en la figura 2.

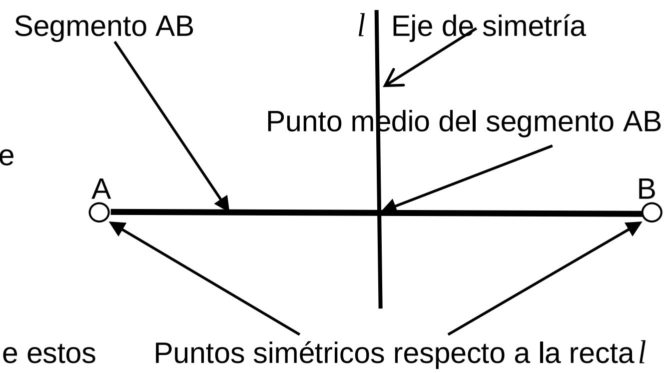


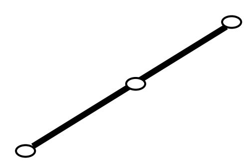
Fig. 2. Simetría respecto a una recta

Definición 2. Decimos que hay *simetría de dos puntos respecto a un punto O* si O es punto medio del segmento que los une. O se conoce como centro de simetría. Figura 3.

Definición 3. Una curva es simétrica con respecto a un eje de simetría cuando para cada punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos respecto al eje. Figura. 4.

Definición 4. Se dice que una curva es simétrica con respecto a un centro simétrico O cuando para cada punto de la curva hay otro punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto a O.

Todas las definiciones anteriores son puramente geométricas.

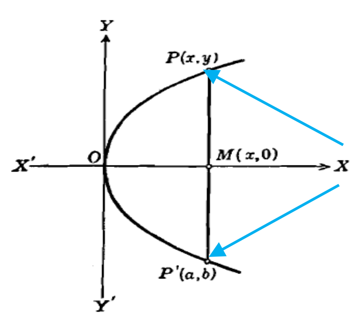


Interpretación analítica de estas definiciones.

Usaremos los ejes coordenados como ejes de simetría y el origen (0,0) como centro simétrico.

Figura. 3. Simetría respecto a un *Punto O.*

a. Simetría respecto al eje x. Sea P(x, y) un punto cualquiera de una curva (Fig. 4). Sí ésta es simétrica respecto al eje x, entonces de la definición 3 se deduce que debe existir otro punto P´(a, b) sobre la curva, tal que el segmento PP´ quede bisecado perpendicularmente por el eje x. Veamos, sea M el punto medio de PP´, sus coordenadas son, evidentemente, (x,0). Entonces por las formulas del punto medio proporcionadas por el



siguiente teorema y uno de sus corolarios Figura 4. Simetría respecto a un eje

Teorema. *Sí $P_1(x_1, y_1)$ & $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada* $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ *son*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}, \quad r \neq -1$$

En el caso particular en que P sea el punto medio del segmento dirigido P_1P_2, resulta que r = 1, así los resultados anteriores se reducen a

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (1)$$

Esto nos lleva al siguiente

Corolario. Las coordenadas del punto medio de un segmento dirigido cuyos puntos extremos se ubican en (x_1, y_1) & (x_2, y_2) son precisamente las expresiones (1).

Ahora utilizando estas formulas para el punto medio M, tenemos $x = \frac{a+x}{2}, \quad 0 = \frac{b+y}{2}$,

de donde a = 2x – x = x & b = 2(0) – y = -y. Por tanto, las coordenadas de P´ son (x, -y). Pero, como P´ está sobre la curva, de la definición 1 Articulo 1, se deduce que sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la curva. Es decir, una ecuación f(x, y) = 0 que se satisface para las coordenadas (x, y) de P se satisface también para las coordenadas (x, -y) de P´ siempre que la curva sea simétrica respecto al eje X.

Este resultado se enuncia como: **Teorema 1**. Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es reemplazada por -y, la curva es simétrica respecto al eje X.

Nota: También el reciproco del Teorema 1 es válido.

Ejemplo: $y^2 = x$

a. Simetría respecto al eje Y. Usando la figura 5, establecemos un teorema análogo al teorema 1, para la simetría de una curva con respecto al eje y.

Teorema 2. Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es reemplazada por –x, la curva es simétrica respecto al eje Y.

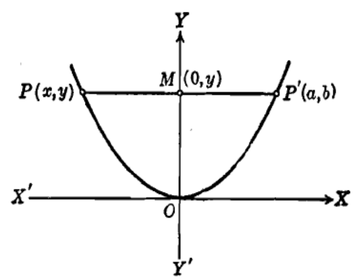


Figura 5 simetría respecto al eje Y.

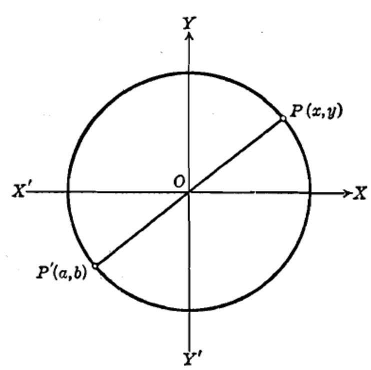
Ejemplo $y = 2x^2 + 1$

a. Simetría respecto al origen. Sea P (x, y) un punto cualquiera de una curva figura 6.

Para que esta curva sea simétrica respecto al origen O, de la definición 4 se deduce que debe haber otro punto P´ (a, b), sobre la curva, tal que O sea el punto medio del segmento PP´. Por las formulas de punto medio tenemos

$$0 = \frac{x+a}{2}; \quad 0 = \frac{y+b}{2}$$

de donde vemos que: $a = -x$ & $b = -y$ entonces las coordenadas de P´ son (-x, -y). Como P´ está sobre la curva, sus coordenadas (-x, -y)



deben satisfacer la ecuación de la curva. Por tanto, para tener simetría respecto al origen, la función del lugar geométrico no debe alterarse al reemplazar x por –x & y por –y, este resultado nos lleva al

Figura 6. Simetría respecto al origen

Teorema 3. Si la ecuación de una curva no se altera al reemplazar las variables x por –x & y por –y, respectivamente, la curva es simétrica con respecto al origen O. Ejemplo: $y = x^3$

4. Extensión de una curva.

Con este término queremos expresar la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de x & de y son valores reales. Esta información es útil por:

1. Proporciona la ubicación general de la curva en el plano coordenado.
2. Indica sí la curva es cerrada o si la curva es de extensión indefinida.

Los intervalos para los cuales los valores de x & de y son reales se determinan, simplemente, resolviendo la ecuación dad para y, en términos de x, & para x en términos de y.

Ejemplo. Discutir la ecuación $y^2 = x^3$, estudiando las intersecciones, la simetría y la extensión de la curva. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución:

a) Intersecciones. Para y = 0, x vale cero, x = 0, para x= 0, y vale cero, y = 0. Entonces el punto de intersección es el origen (0, 0).

b) Simetría. Si se sustituye y por –y, la ecuación $y^2 = - x^3$, no se altera, por lo tanto es simétrica respecto al eje X. Si se sustituye x por –x la ecuación $y^2 = x^3$ si se altera $y^2 = - x^3$, por lo tanto no es simétrica respecto al eje Y. Si se sustituyen x & y por –x & -y respectivamente, la ecuación $y^2 = x^3$ también cambia, $y^2 = - x^3$, entonces concluimos que la curva no es simétrica respecto al origen O.

c) Extensión. Despejando y en función de x, obtenemos $y = \pm\sqrt{x^3}$ (1)
se ve que y es compleja para valores negativos de x, esto significa que ninguna porción de la curva está a la izquierda del eje Y; por lo tanto, estos valores quedan excluidos del presente análisis. En cambio, si se pueden tomar todos los valores positivos de x, en este caso y toma valores reales, esto quiere decir que la curva si tiene porción a la derecha del eje Y.

Ahora despejando x obtenemos $x = y^{2/3}$ evidentemente, y puede tomar todos los valores positivos y negativos. Esto aunado a que todos los valores positivos de x son admisibles, indica

I. Que la curva se extiende a la derecha del eje Y. &

II. Hacía arriba y hacia abajo, del eje X, debido a las raíces positivas y negativas de $\sqrt{x^3}$. Por lo tanto la curva no es cerrada. Calculando algunos valores.

Con estos valores graficamos

Tabla 3. Valores de x & y de la ecuación (1)

X	Y
0	0
1	± 1
2	± 2.8
3	± 5.2

Ejercicio propuesto: $x^4 + 9x^2 - y = 0$

Discútase la ecuación estudiando las intersecciones, simetría y extensión. Después trácese la gráfica correspondiente. Como ejercicio de evaluación, se le pide al Lector resolverlo.

5. Asíntotas.

Determinación de asíntotas que una curva pueda tener.

Definición RAE. Línea recta que, prolongada, indefinidamente se acerca de continuo a una curva, sin llegar nunca a encontrarla

Definición. Si para una curva dada, existe una recta tal que a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, a esa recta se le llama asíntota de la curva.

Esta definición implica dos cosas

I. Una curva que una asíntota no es cerrada o de extensión finita, sino que se extiende indefinidamente.

II. Una curva se aproxima a la asíntota más y más en el plano coordenado.

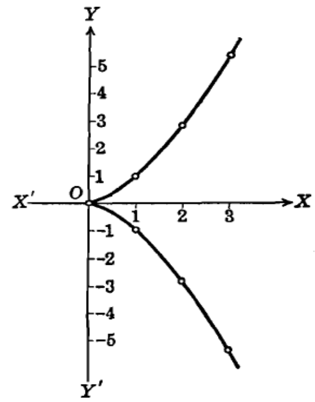


Figura 7. Gráfica de la ecuación (1) parábola semicúbica

Como la asíntota es una recta, puede tener una de las tres siguientes posiciones:

1) Paralela al eje X, se llama asíntota horizontal.
2) Paralela al eje Y, se llama asíntota vertical.
3) No paralela a ninguno de los ejes X o Y, se llama asíntota oblicua.

Ecuaciones de asíntotas horizontales y verticales.

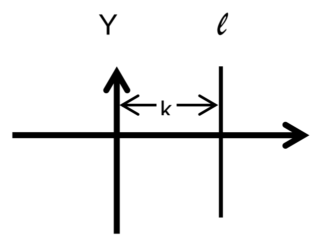


Figura 8. Asíntota

Sea ℓ, figura 8 una recta cualquiera paralela al eje Y. y dista k unidades del eje Y. Todo punto de ℓ, cualquiera que sea su ordenada (y), tiene una abscisa (x) igual a k. Esto quiere decir que las coordenadas de todos los puntos de ℓ satisfacen la ecuación x = k y recíprocamente, cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación es un punto cuya abscisa es k y está situado a una distancia k unidades del eje Y.

Consecuentemente ese punto está sobre la recta ℓ. De aquí que la ecuación de ℓ sea x=k.

Un razonamiento análogo nos permite hallar que y=k es la ecuación de una recta paralela al eje X a k unidades del mismo.

Ejemplo: Hallar las asíntotas horizontal y vertical de la curva $xy - y - 1 = 0$ (1)

Solución. Despejando y en función de x, resulta $y(x - 1) = 1$, despejando y

$$y = 1/(x - 1) \qquad (2)$$

Según la ecuación (2) y no existe o no está definida para x = 1, pero si le asignamos a x un valor ligeramente mayor a 1, vemos que y toma un valor muy grande positivamente, observemos esto en la siguiente tabla.

Tabla 4. Valores de x & y de la ecuación (2)

X	Y
1.1	10
1.01	100
1.001	1000
1.0001	10000
1.00001	100000
1.000001	1000000

Conforme el valor de x se acerca a 1, y crece grandemente en forma positiva. Y si al valor de x se le da uno ligeramente menor que 1, entonces y crece grandemente en forma negativa. Esto sugiere que cualquier punto muy cercano a 1, tiene una abscisa con valor cercano a 1, pero la ordenada es numéricamente muy grande. Con estas condiciones tenemos una curva que se extiende indefinidamente lejos y se aproxima a una recta cuyos puntos tienen la propiedad común de que su abscisa es igual a 1. Entonces la ecuación de ésta es x = 1 y es una asíntota vertical. Ahora, si despejamos de (1) a x tenemos

$$x = \frac{y+1}{y} \qquad (3)$$

Aplicando el mismo argumento a la ecuación (3), obtenemos y = 0, o sea el eje X será la asíntota horizontal de esta curva. La gráfica se muestra en la figura 9.
La discusión del ejemplo anterior sugiere un método general para encontrar las ecuaciones de las rectas asíntotas de una curva.

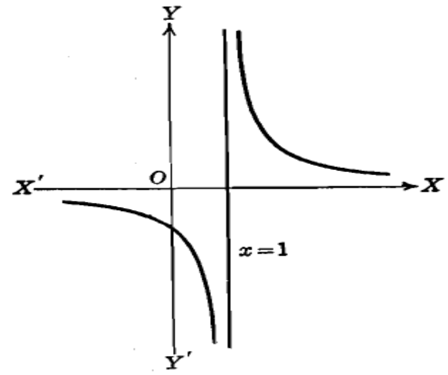


Figura 9. Curva de (1), hipérbola.

1.Para asíntotas verticales, resolver la ecuación dada para y en función de x e iguálese a cero
cada uno de los factores lineales del denominador; éstas serán las ecuaciones buscadas.
2. Para las asíntotas horizontales resuélvase la
a cero cada uno de los factores lineales del ecuación dada
para x en función de y e iguálese denominador, éstas serán las ecuaciones buscadas.
3. En muchas ecuaciones es mejor investigar el comportamiento de una de las variables cuando a la otra se le dan valores cada vez más grandes en valor absoluto. Esto es útil para ubicar las asíntotas.

Ejemplo $\quad y = \frac{1}{x-1}$; si $|x| \to \infty \,; \Rightarrow y \to 0$

6. Construcción de curvas.

Problema en conjunto ecuación y su representación gráfica.

El trazo de una curva consta de seis pasos.

1. Ubicar las intersecciones con los ejes coordenados.
2. Determinar la simetría de la curva con respecto a los ejes y al origen.
3. Encontrar la extensión de la curva.
4. Obtener las ecuaciones de las asíntotas que la curva pueda tener.
5. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.
6. Trazar la curva.

Ejemplo. Construir la curva cuya ecuación es $x^3 + xy^2 - y^2 = 0 \qquad (1)$

Solución.

1. Intersecciones. Analizando la ecuación (1), si x = 0, entonces y = 0; y si y = 0, entonces x = 0. Entonces el único punto de intersección es el origen (0, 0).
   Despejando y

   $$x^3 + xy^2 - y^2 = 0,\ factorizando\, y,\ \ y^2(x-1) = -x^3, despejando\, y^2, y^2 = -\frac{x^3}{x-1} = -\frac{x^3}{-(1-x)} = \frac{x^3}{1-x},$$

   $$aplicando\, raíz\, cuadrada,\ y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \qquad (2)$$

2. Simetría. La ecuación 1 no se altera si se sustituye y por –y, pero si se sustituye x por –x, la función se altera, por lo tanto la curva tiene simetría respecto al eje horizontal.

3. Extensión. De la ecuación 2 vemos que y es compleja cuando x toma valores negativos, por tal motivo, éstos quedan excluidos, consecuentemente no hay curva a la izquierda del eje Y. Además, y no está definida para x=1, ya que si x = 1, entonces y no está definida, si x toma valores mayores a 1, y es compleja, entonces el intervalo de variación será

$$0 \leq x < 1 \qquad (3)$$

No es fácil despejar x de la ecuación (1). Sin embargo en la ecuación (2) vemos que y puede tomar todos los valores reales asignados a x, o sea valores comprendidos dentro del intervalo de variación (3).

Así podemos intuir que:

a. y toma valores positivos y negativos simultáneamente cuando se asignan un solo valor a x.
b. Ya vimos que y crece grandemente cuando x toma valores cercanos a 1.
c. La gráfica será una curva abierta que se extiende indefinidamente hacía arriba y abajo del eje X.

1. Asíntotas. De la ecuación (2), vemos que x = 1 es una asíntota vertical.
Como de la ecuación (1) no se puede despejar x en función de y, no se puede ver si hay asíntotas horizontales, sin embargo de acuerdo con la nota 3, del artículo 5, dada después del ejemplo respectivo, podemos asignar valores cada vez mayores en valor absoluto, pero por el intervalo considerado esto queda excluido del presente ejemplo. Por lo tanto no hay asíntotas horizontales.
2. Cálculo de coordenadas. Si usa la ecuación (2), los valores se muestran en la tabla 5.
3. Construcción de la curva. Ésta se muestra en la figura 10.

Tabla 5. Valores xy para la ecuación (2)

x	Y
0	0
0.25	$\pm$ 0.14
0.5	$\pm$ 0.5
0.75	$\pm$ 1.3

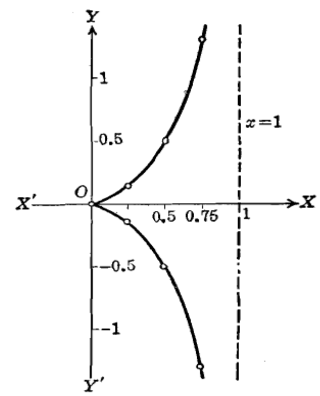


Figura 10. Lugar geométrico de (1)

7. Ecuaciones factorizables.

El trazo de curvas se simplifica considerablemente para cierto tipo de ecuaciones, a éstas se les llaman *ecuaciones factorizables;* es decir se pueden escribir en forma del producto, de dos o más factores variables, que se iguala a cero.

Ejemplo. La ecuación, $x^2 - y^2 = 0$ (1)

se puede escribir como, $(x-y)(x+y)=0$ (2)

Esta igualdad se cumple si al menos uno de los factores es igual a cero. Es decir se satisface para valores que satisfagan el siguiente par de ecuaciones:

$$x-y=0 \qquad (3)$$
$$x+y=0 \qquad (4)$$

Vemos que cualquier par (x, y), de coordenadas que satisfaga (3), satisface también a (4), por supuesto también a la ecuación (2), consecuentemente a la ecuación (1). La gráfica de la ecuación (1) consistirá de dos curvas que son los lugares geométricos de las ecuaciones (3) y (4), esto es dos rectas que pasan por el origen y tienen pendiente 1 y -1 respectivamente.
En general, si la ecuación f(x, y) = 0 (5)
es factorizable, es decir si f (x, y) puede reescribirse como producto de dos o más factores,

entonces el lugar geométrico de (5) constará de las gráficas de las ecuaciones obtenidas al igualar a cero cada uno de esos factores.

8. Intersección de Curvas.

Consideremos dos ecuaciones independientes

$$f(x, y)=0 \qquad (1)$$
$$g(x, y)=0 \qquad (2)$$

Si sus gráficas se cortan en uno o más puntos, cada uno de éstos se llama punto de intersección. Como cada punto de intersección está sobre cada una de dichas curvas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, ambas ecuaciones (1) y (2). La interpretación analítica de un punto de intersecciones obvia; en el caso que estamos estudiando, es un punto cuyas coordenadas representan una solución común de las ecuaciones (1) y (2). Las coordenadas deben ser ambas números reales, porque una solución común (x, y) de (1) y (2) no puede representar un punto de intersección a menos que sean valores reales. Además si (1) y (2) no tienen solución común, es decir no son compatibles, entonces sus gráficas no se cortan.

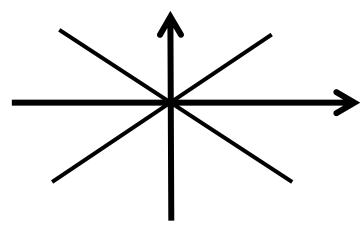


Figura 11. Lugar geométrico ecuación (2)

Ejemplo. Hallar analíticamente y gráficamente, los puntos de intersección de las curvas (la primera es una recta) cuyas ecuaciones son

$$2x + y - 4 = 0 \qquad (3)$$
$$y^{2} - 4x = 0 \qquad (4)$$

Solución. Despejamos y de (3), $y = 4 – 2x$, Sustituimos en (4)

$$x^{2} – 5x + 4 = 0$$

Sus raíces son: x = 1, 4. Sustituyendo en (4) obtenemos que y vale 2, -4. Entonces los puntos de intersección son: (1, 2) y (4, -4). Gráficamente, los puntos de intersección se obtienen trazando la recta (3) y la curva (4). Figura 12.

9. Segundo problema fundamental.

Consideremos ahora el segundo problema fundamental de la Geometría analítica: Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Una figura geométrica, tal como una curva, se da, generalmente, por su *definición.* Por *definición de un objeto* entendemos una descripción de ese objeto, de tal naturaleza que sea posible identificarlo de una manera definida entre todos los demás objetos de su clase.

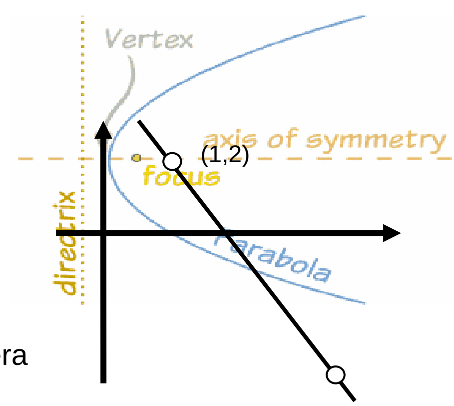


Figura 12. Intersección de curvas (3) y (4)

Debemos observar cuidadosamente lo que implica este enunciado: expresa una *condición necesaria* y *suficiente* para la existencia del objeto definido**.** Así, consideremos que estamos definiendo una curva plana del tipo C por medio de una propiedad P que únicamente posee C. Entonces, entre todas las curvas planas, una curva es del tipo C *si* y *solamente si* posee la propiedad P. Como un ejemplo especifico, consideremos una curva plana muy reconocida. La circunferencia. Definimos una circunferencia como una curva plana que posee la propiedad única P de que todos sus puntos están a igual distancia de un punto fijo en su plano. Para una curva, dar la condición que deben cumplir sus puntos es dar una ley a la cual deben obedecer los puntos de la curva. Esto significa que todo punto de la curva debe satisfacer la ley particular de la curva.

De acuerdo con esto se define frecuentemente una curva como el *lugar geométrico descrito por un punto que se mueve siguiendo una ley especificada.* Así, una circunferencia puede definirse coma el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a un punto fijo de ese plano es constante.

Un lugar geométrico no debe satisfacer necesariamente una sola condición; puede satisfacer dos o más condiciones.
Entonces podemos tener una curva que sea el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que:
1. Pasa por un punto dado, y
2. Permanece siempre a una distancia constante de una recta dada.

Resumiendo obtenemos la siguiente

DEFINICIÓN. Una curva es el lugar geométrico de todos aquellos puntos, y *solamente* de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

10. Ecuación de un lugar geométrico.

Ahora veremos cómo determinar la ecuación de un lugar geométrico en el caso de que la interpretación analítica de la condición o condiciones geométricas definan el lugar geométrico.
El método está indicado claramente por dos definiciones previas, definición 1 del Artículo 1 y la última definición del Artículo 9. Combinándolas tenemos:

DEFINICIÓN. Se llama *ecuación de un lugar geométrico plano* a una ecuación de la forma;

$$f(x, y) \qquad (1)$$

cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x & de y son todas las coordenadas de aquellos puntos, y *sólo* de aquellos puntos, que satisfagan la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico.

De acuerdo con esto, el proceso para obtener la ecuación de un lugar geométrico es:

1.Se Supone que el punto P, de coordenadas (x, y) es un punto *cualquiera* que satisface la condición o condiciones dadas, y, por tanto, un punto del lugar geométrico.
2. Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables x & y.
3. Se simplifica, si se requiere, la ecuación obtenida en el paso 2 de tal manera que tome la forma (1).
4. Se comprueba el recíproco: sean (x_1, y_1) las coordenadas de *cualquier* punto que satisfaga (1) de tal manera que la ecuación

$$f(x_1, y_1) = 0 \qquad (2)$$

sea verdadera. Si de (2) se puede deducir la expresión analítica de la condición (es) geométricas dadas, cuando se aplican al punto (x_1, y_1), entonces (1) es la ecuación del lugar geométrico que se buscaba.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados A (-1, 2) y B (4, -1).

Solución.

1. Sea P (x, y) un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces P debe satisfacer la condición geométrica de que los segmentos PA y PB sean iguales en longitud (un punto que siempre equidista de dos puntos dados), o sea que

$$|\overline{PA}| = |\overline{PB}| \qquad (3)$$

es decir la distancia del punto P al punto A es siempre igual que la distancia del punto P al punto B y ésta es la condición geométrica del lugar geométrico del cual buscamos su ecuación.

2. Se sabe que la distancia entre dos puntos es calculada con las formulas

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$$

$$|\overline{PB}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}$$

entonces la condición geométrica dada por (3) está expresada analíticamente por la ecuación.

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} \qquad (4)$$

3. Si elevamos al cuadrado ambos miembros de (4), desarrollamos, transponemos y simplificamos, la ecuación se reduce a

$$5x - 3y - 6 = 0 \qquad (5)$$

4. Sean (x_1, y_1) las coordenadas de un punto cualquiera P_1 que satisfacen (5) de tal manera que la ecuación

$$5x_1 - 3y_1 - 6 = 0 \qquad (6)$$

es verdadera. El reciproco… Invirtiendo los paso dados para reducir (4) a (5), podemos demostrar que de la ecuación (6) se deduce la ecuación

$$\sqrt{(x_1+1)^2 + (y_1-2)^2} = \sqrt{(x_1-4)^2 + (y_1+1)^2}$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (3) aplicada al punto P_1.

Entonces (5) es la ecuación buscada. El lugar geométrico se muestra en la figura 13. Lo que se ve es la perpendicular al segmento AB en su punto medio, es decir, la mediatriz del segmento AB.

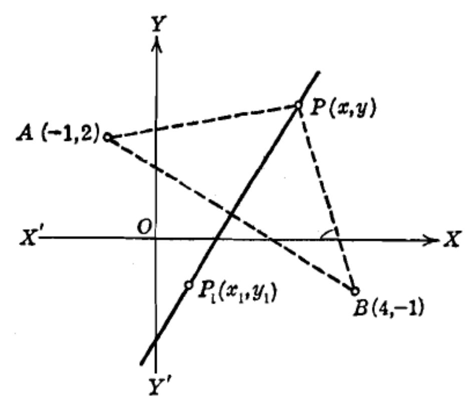


Figura 13. Lugar geométrico de la función (3)

Si se comprendió este repaso de geometría analítica, el lector puede confiar en que cuenta con las bases, de geometría, suficientes para entender y aplicar los métodos de análisis de sistemas logrando mantener un claro entendimiento de los mismos, esto le proporcionará la competencia suficiente para continuar sus estudios de Ingeniería.

REFERENCIAS

Lehmann, C. H. (1989). *ANALYTIC GEOMETRY*, New York, E. U. A.: John Wiley.

Siceloff, L. P., Wentworth, G. & Smith D. E. (1922), ANALYTIC GEOMETRY, Boston, E.U.A.: GINN & COMPANY.