A PROPÓSITO DEL PRODUCTO PUNTO...

Andrea del Rocío Gordillo Castañeda,
Mónica Itzel Ramírez López,
Gamaliel Ramírez Ramírez,
Fátima Rubí Romero Lima

October 17, 2015

email: andeegc@gmail.com

Ingeniería Bioquímica,
Instituto Tecnológico de Tehuacán
Noviembre 2014

Palabras clave Producto Punto, Norma de vector

Abstract

En este artículo reportamos las fórmulas necesarias y el procedimiento para obtener las coordenadas de los puntos que conforman a dos triángulos equiláteros construidos a partir de dos puntos en el plano de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Mediante la aplicación de herramientas de cálculo como norma del vector, producto punto; así cómo de geometría analítica: punto medio y ecuación de la recta.

Además se obtienen las ecuaciones generales de las rectas que forman a los dos triángulos equiláteros despúes de ser obtenidos los vértices de cada triángulo construido.

1 Introducción

La geometría analítica en dos dimensiones se puede formalizar utilizando las herramientas del cálculo vectorial así por ejemplo, las distancia entre dos puntos se obtiene mediante la norma del vector diferencia:

$d = (x_0, y_0), (x_1, y_1) = \|(x_0,y_0) - (x_1,y_1)\| = \|(x_0 - x_1, y_0 - y_1)\|$

En tanto que la geometrización necesaria para obtener ángulos entre vectores la tenemos con el producto punto definido como

$(x_1, y_1) \cdot (x_0, y_0) = \|(x_0,y_0)\| \, \|(x_1,y_1)\| \, Cos\theta = x_0x_1 + y_0y_1$

Donde θes el ángulo entre los dos vectores(x_0, y_0) y (x_1, y_1).

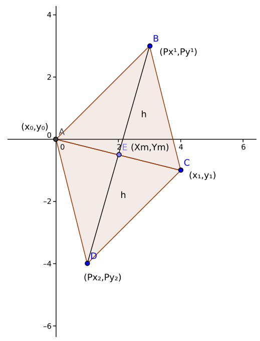

Figure 1: Coordenadas de cada triángulo equilátero que se desean conocer.

2 Desarrollo

Supondremos conocidos los puntos definidos por las variables$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, y a partir de ellos obtendremos primero la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.

Como (x_0, y_0) y (x_1, y_1) están en una recta que podria ser $Ax + By = C$ entonces satisfacen esta ecuación:

$(x_0A + y_0B) = 1$

$(x_1A + y_1B) = 1$

Resolviendo el sistema obtenido de sustituir los valores de x_0, y_0, x_1, y_1 en la ecuación tenemos:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 - y_0}{x_0y_1 - y_0x_1}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \frac{x_0 - x_1}{x_0y_1 - y_0x_1}$$

Con lo cual la ecuación queda:

$x(y_0 - y_1) + y(x_0 - x_1) = x_0y_1 - y_0x_1$

Donde en la forma $Ax + By + C = 0$

$A = y_0 - y_1$

$B = x_0 - x_1$

$C = y_0x_1 - x_0y_1$

Utilizando las fórmulas de pendiente, puntos medios y distancia:

$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$x_m = \frac{x_1 + x_0}{2}$

$y_m = \frac{y_1 + y_0}{2}$

$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$

Ocupamos producto punto para encontrar la ecuación de la diagonal o altura de los triángulos, entonces:

$A{\cdot}B = |A|\,|B|\,Cos\theta$

Para un triángulo equilátero como el requerido sabemos que $\theta = 60^{\text{o}}$ y la norma es la misma para los dos vectores (triángulo equilátero) así que

$A_1 = x_1 - x_0$

$B_1 = x - x_0$

$A_2 = y_1 - y_0$

$B_2 = y - y_0$

Sustituyendo:

$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0) = \frac{d^2}{2}$

$(x_1 - x_0)x - (x_1 - x_0)x_0 + (y_1 - y_0)y - (y_1 - y_0)y_0 = \frac{d^2}{2}$

$(x_1 - x_0)x + (y_1 - y_0)y = \frac{d^2}{2} + (x_1 - x_0)x_0 + (y_1 - y_0)y_0$

$(x_1 - x_0)x + (y_1 - y_0)y = \frac{(x_1-x_0)^2}{2} + \frac{(y_1-y_0)^2}{2} + (x_1 - x_0)x_0 + (y_1 - y_0)y_0$

$(x_1 - x_0)x + (y_1 - y_0)y = \frac{x_1-x_0}{2}(x_1 - x_0 + 2x_0) + \frac{y_1-y_0}{2}(y_1 - y_0 + 2y_0)$

$x + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}y = \frac{x_1-x_0}{2} + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(\frac{y_1-y_0}{2})$

La ecuación de la diagonal es: $x + my = x_m + my_m$..........Ecuación 1

Altura del triángulo: $h^2 = \frac{3}{4}d^2$por Pitágoras.

Distancia entre el punto medio y el vértice:

$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = \frac{3}{4}d^2$...Ecuación 2

Despejamos x de la ecuación de la diagonal:.....................Ecuación 3

$x = x_m + my_m - ym$

$x = x_m + m(y_m - y)$

Sustituimos en la ecuación 2 obtenemos las siguientes ecuaciones:

$(x_m + my_m - my - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = \frac{3}{4}d^2$.................Ecuación 4

$[m(y_m - y)]^2 + (y - y_m)^2 = \frac{3}{4}d^2$...................................Ecuación 5

$m^2(y - y_m)^2 + (y - y_m)^2 = \frac{3}{4}d^2$...................................Ecuación 6

$(y - y_m)^2(m^2 + 1) = \frac{3}{4}d^2$..Ecuación 7

$(y - y_m)^2 = \frac{3d^2}{4(m^2+1)}$...Ecuación 8

$y = y_m \pm \sqrt{\frac{3d^2}{4(m^2+1)}}$...Ecuación 9

Si sustituimos la ecuación 9 en la 3 tenemos que:

$x = x_m + my_m - m\left(y_m \pm \sqrt{\frac{3d^2}{4(m^2+1)}}\right)$

$x = x_m \pm \sqrt{\frac{3d^2m^2}{4(m^2+1)}}$

Con todo ello se obtienen las coordenadas que representan los vértices requeridos para formar dos triángulos equiláteros respecto a la recta señalada al inicio:

$\left(x_m \pm \sqrt{\frac{3d^2m^2}{4(m^2+1)}}, y_m \pm \sqrt{\frac{3d^2}{4(m^2+1)}}\right)$

Las ecuaciones que representan las rectas que conforman los lados de ambos triángulos son:

I. Entre (x_1, y_1) y $\left(x_m - \sqrt{\frac{3d^2m^2}{4(m^2+1)}}, y_m + \sqrt{\frac{3d^2}{4(m^2+1)}}\right)$ donde los llamamos (x_1, y_1) y (x_0, y_0) y $m = \frac{y_1-y_1}{x_1-x_1}$

$y - y_1 = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1}(x - x_1)$
$y - y_1 = m_1(x - x_1)$
$y = m_1 x - m x_1 + y_1$
Por lo que la Ecuación de la recta 1 es: $y = m_1 x + b_1$donde $b_1 = y_1 - m_1 x_1$
II. Entre (x_1, y_1) y $\left(x_m + \sqrt{\frac{3d^2m^2}{4(m^2+1)}}, y_m - \sqrt{\frac{3d^2}{4(m^2+1)}}\right)$ donde los llamamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$y - y_1 = m_2(x - x_1)$
$y = m_2 x - m_2 x_1 + y_1$
Por lo que la Ecuación de la recta 2 es: $y = m_2 x + b_2$siendo $b_2 = y_1 - m_2 x_1$
III. Entre (x_0, y_0) y $\left(x_m - \sqrt{\frac{3d^2m^2}{4(m^2+1)}}, y_m - \sqrt{\frac{3d^2}{4(m^2+1)}}\right)$ donde los llamamos (x_1, y_1) y (x_3, y_3) y $m_3 = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}$
$y - y_0 = m_3(x - x_0)$
$y = m_3 x - m_3 x_0 + y_0$
Por lo que la Ecuación de la recta 3 es: $y = m_3 x + b_3$donde $b_3 = y_0 - m_3 x_0$
IV. Entre (x_0, y_0) y $\left(x_m + \sqrt{\frac{3d^2m^2}{4(m^2+1)}}, y_m + \sqrt{\frac{3d^2}{4(m^2+1)}}\right)$ donde los llamamos (x_1, y_1) y (x_4, y_4) y $m_4 = \frac{y_4 - y_0}{x_4 - x_0}$
$y - y_0 = m_4(x - x_0)$
$y = m_4 x - m_4 x_0 + y_0$
Por lo que la Ecuación de la recta 4 es: $y = m_4 x + b_4$donde $b_4 = y_0 - m_4 x_0$
De todo esto obtenemos que, las coordenadas de los dos puntos que forman los triángulos son:
$\left(x_m = \pm\sqrt{\frac{3d^2m^2}{4(m^2+1)}}, y_m = \pm\sqrt{\frac{3d^2}{4(m^2+1)}}\right)$
Además de las Ecuaciones de las rectas que conforman cada triángulo:
$y = m_1 x + b_1$donde $b_1 = y_1 - m_1 x_1$............ Ecuación de la recta I
$y = m_2 x + b_2$siendo $b_2 = y_1 - m_2 x_1$.............Ecuación de la recta II
$y = m_3 x + b_3$donde $b_3 = y_0 - m_3 x_0$.............Ecuación de la recta III
$y = m_4 x + b_4$donde $b_4 = y_0 - m_4 x_0$.............Ecuación de la recta IV
Donde el valor de las constantes b y m se describen anteriormente en la descripción de cada ecuación.

3 Conclusiones

Debemos recordar que un triángulo equilátero cumple con el requisito de que sus ángulos internos son de 60°; de acuerdo a esto, construimos las ecuaciones que nos ayudaron a hallar las coordenadas de los vértices que conforman a los triángulos.

Se encontraron los valores de A y B que son las constantes que acompañarán a x y y en la ecuación de la recta, dichos valores los sustituimos en la fórmula de producto punto para despejar x y y, donde los valores nos arrojaron los puntos medios y pendiente, con ello formamos la ecuación 1 que corresponde a la diagonal de los triángulos.

La ecuación número 2 la construimos a partir de la fórmula de la altura del triángulo aplicando el Teorema de Pitágoras, donde el valor de la altura esta dado por la distancia del punto medio al vértice. En su caso, para la ecuación 3 despejamos x de la ecuación de la diagonal.

Las ecuaciones siguientes, de la 4 a la 9, las obtuvimos sustituyendo el despeje de$x$ en las ecuaciones 2 y 3, asi se obtuvo a y en la ecuación 9; para encontrar el valor de x sustituimos el valor de y en la ecuación número 3, de esta forma se encontraron las coordenadas de los vértices desconocidos.

Las ecuaciones de las rectas I, II, III y IV que pasan por los vértices, las obtuvimos utilizando la fórmula de punto pendiente.

4 Bibliografia

Larson Hostetler, Edwards. Cálculo de Varias Variables: El producto escalar o producto punto de dos vectores. (2009). México: Mc Graw Hill.

Larson, Robert Hostetler. Precalculo: Temas complementarios de Geometría. Editorial Reverte.

Anton, H. "Introducción al Álgebra lineal".2º Edición. Limusa. México, 2000.

Nakos, G. y Joyner, D. "Álgebra lineal con aplicaciones". Thomson editores. México, 1999.