Sección: "EL ESPACIO FÍSICO"

Rogelio Rojas Ramos*

15/12/2014

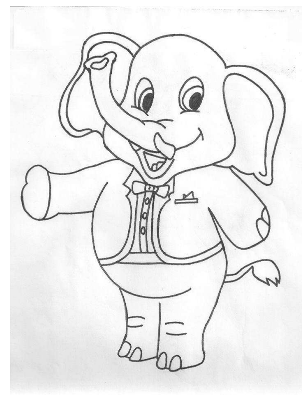
Capítulo 4: Poema formal de límite.

En el capítulo anterior, llamado cálculo provisional, presentamos algunos conceptos importantes del cálculo diferencial, expresados en forma intuitiva y amena, sacrificando formalidad pero ganando comprensión. Muchos de nuestros lectores han solicitado que se realice algo similar con la definición formal de límite, una tarea nada sencilla si consideramos que, para llegar a tener una mejor comprensión de la teoría, esta sección busca privilegiar la deducción más que otro estilo de razonamiento. Pero si bien la sección se denomina *el espacio físico*, solo el capítulo cero se dedicó explicitamente a la Física y los capítulos restantes a cuestiones matemáticas, debido en gran parte al interés y peticiones de los lectores. Es por ello que no hay razón alguna por la cual no dar gusto a tal petición en este capítulo, iniciemos entonces con la exposición de nuestra primera definición formal.

Cierta mañana, posterior al safari de nuestros amigos protagonistas (el elefante y el ratón) con su amigo carlitos de España. Nuestro conocido paquidermo se columpiaba en el parque tratando de componer una bella poesía para declamar, y recordó entonces una frase escrita en el libro *Calculus* de M. Spivak [1] acerca de la definición formal del límite de una función de variable real:

"¡apréndala el lector de memoria si es necesario, como si fuese un poema! Ésto es, por lo menos, mejor que emplearla incorrectamente; quien haga ésto, irremediablemente sacará demostraciones incorrectas."

*Catedrático: Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Tehuacan



La defición a la que hace alusión el parrafo anterior es la siguiente:

"El Límite de $f(x)$ en x_0 es ℓ sí $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta=\delta\,(\varepsilon)>0$ tal que, $\forall x$, sí $0<|x-x_0|<\delta$ entonces $|f\,(x)-\ell|<\varepsilon$."

Si es la primera vez que el lector tiene contacto con esta simbología, no encontrará la belleza de la que hablamos. Quiza lo mas conveniente sea traducir éstos simbolos al castellano para aprenderla de memoria:

"*El límite de la función efe de equis en el punto equis sub-cero es ele si para toda épsilon mayor que cero existe algún delta función de épsilon mayor que cero tal que, para toda equis, sí equis y equis sub-cero distan positivamente en menos que delta entonces efe de equis y ele distan en menos que épsilon*" (¡aplausos!)

Aunque, es muy probable que algunos lectores, cuyo interés no sea leer matemática, permanezcan absortos y en silencio durante un momento (sin encontrar sentido a estas palabras) pero despues del silencio solo resta brindar muchos aplausos a nuestro paquidermo. Al igual que sucede con muchas obras culturales, a las que no se les encuentra sentido, es necesario saber conocer y apreciar la monumental obra para que los aplausos sean espontáneos.

¡A conocer entonces la simbología que aparece en la definición formal! Empecemos con el símbolo $\forall$ que representa al cuantificador universal (y se suele leer "para todo"). Un cuantificador es un prefijo que antepuesto a un enunciado abierto lo transforma en una proposición, que puede ser calificada como falsa o verdadera. Por ejemplo, consideremos el conjunto llamado {\it club de los animalitos} E formado por Dumbo, Efelante, Stampy y Elefancio, un enunciado abierto que involucre este conjunto puede ser: "el elefante de E pesa mas de una tonelada" el cual no presenta información específica. Con el cuantificador universal precediendo: "todos los elefantes de E pesan más de una tonelada" y significa que: Dumbo pesa más de una tonelada y Efelante pesa más de una tonelada y Stampy pesa mas de una tonelada y Elefancio pesa más de una tonelada, es decir el cuantificador universal junto a un enunciado abierto representa una conjunción de proposiciones.

El siguiente símbolo ε (letra griega épsilon) denotará un número real que cumple con todas las propiedades de campo de los números reales y pedimos sea un número positivo. Después aparece el símbolo $\exists$ que no significa estacionarse de reversa, representa al cuantificador existencial (y se suele leer "existe algún"). Consideremos nuevamente el club de los animalitos E y el enunciado abierto "el elefante de E tiene orejas grandes." Con el cuantificador existencial: "existe algún elefante de E que tiene orejas grandes" y significa que: Dumbo tiene orejas grandes o Efelante tiene orejas grandes o Stampy tiene orejas grandes o Elefancio tiene orejas grandes, es decir el cuantificador existencial antepuesto a un enunciado abierto representa una disyunción de propocisiones.

Después aparece la letra griega delta δ que denota una función que depende del número real ε por lo cual se emplea la notación de función $\delta(\varepsilon)$ y pedimos que sea positiva. Por último aparecen dos valores absolutos que representan el valor positivo de las diferencias entre dos cantidades. Y la relación que guardan estas dos diferencias positivas es la parte central de la definición formal, es la parte medular para demostrar que un número real ℓ es el límite de una función en x_0[1].

Debido al enunciado anterior, debemos tener muy presente que el empleo de la definición formal **no sirve para encontrar el valor del límite ℓ, sirve para demostrar que ℓ es el límite de la función**. El uso de la definición formal tiene la premisa de conocer (o creer conocer) el valor del límite. El uso correcto de las propiedades de los números reales, de las desigualdades y del valor absoluto determinaran la dificultad o la trivialidad para encontrar δ en términos de ε (para toda ε). Entonces la finalidad de la definición formal, y toda la belleza del poema, radica en encontral la delta, por muy pequeña que sea épsilon.

Conociendo el lenguaje del poema tendrémos, quiza, una mejor apreciación de la declamación de nuestro paquidermo poeta y los aplausos se tornarán más espontáneos y prolongados. Pero, si se desea más expresión cultural terminemos este capítulo con la negación de la definición formal, pidiendo al lector que la revise a detalle, pues la negación de las conjunciones y de las disyunciones, hacen uso de las llamadas leyes de De Morgan.

"$\exists$ algún $\varepsilon>0$, tal que $\forall$ $\delta>0$ $\exists$ algún x para el cual es $0<|x-x_0|<\delta$ pero no $|f(x)-\ell|<\varepsilon$."

[1] M. Spivak; *Calculus*(Fourth Edition); Publish or Perish, Inc. Texas USA (2008).

[1] es decir el valor que tomaría la función en $x_0$debido a los números cercanos a x_0