DESDE LA CÁTEDRA.

De la Importancia de Los Diferentes Modos de Razonamiento en el Aprendizaje de la Matemática

María Guadalupe Amador Puertos

Pablo Martín Amador Puertos

Resumen:

La Matemática crece y se fortalece en el estudiante completando ciclos, donde alternan y se entrelazan diferentes modos de razonamiento, si estos ciclos son debidamente cumplidos, se crea un tejido firme que conecta diferentes ámbitos de nuestro conocimiento lo que le asegura buen tránsito entre las Ciencias Básicas y las Áreas Tecnológicas, es decir, se favorece la creatividad.

En este artículo, presentamos un experimento encaminado a traslucir de principio a fin, la mecánica (si se le puede llamar así) con la que un individuo enfrentó un problema y se reporta la manera que utilizó para almacenar conocimientos alcanzados hasta llegar a la estructura de la solución,el unico requisito que se pedía como conocimientos previos era conocer un poco de algebra; haciendo énfasis en el proceso abductivo, inductivo y deductivo alcanzado, lo cual sugujere la mezcla de dichos procesos en la solución creativa de problemas.

Resumen

Mathematics grows and get stronger within student, completing cycles, where several thinking ways take turns and entwine. If each one of these cycles is duly accomplished, it results in a firm weave connecting diverse spheres of his knowledge ensuring good transition between Basic Sciences and Technological Areas, in other words, giving advantage to creativity.

In this paper, we present an experiment aimed at traslucir from start to finish, the mechanics (if you can call it that) with which an individual faced a problem and reported the way it used to store knowledge gained to reach the structure the solution, the only requirement calling for prior knowledge was known as a bit of algebra, emphasizing the process abductive, inductive and deductive reached, which suggest a package mix these processes in creative problem solving.

Presentación del experimento

Se buscó un individuo con conocimiento de álgebra (08/DIC/2011), se averiguó si se encontraba en su bagaje la solución de un problema clásico simple (suma de los cuadrados de los primeros n números naturales, que Gauss resolvió en su infancia) asegurándose del desconocimiento de su solución por la persona, entonces se le enteró que había fórmulas para resolver progresiones, resueltas por Gauss a la edad de 7 años y se acordó con él la realización del experimento: "siguiendo los pasos de Gauss" (12/DIC/2011), en la que el sujeto del experimento competiría con Gauss, con la ventaja de 1. Saber que el problema tiene una solución muy concisa 2. Cuenta con tiempo ilimitado (Gauss lo tuvo que realizar durante una clase) 3. La madurez de la persona y la época en que vive la persona le confiere amplia ventaja.

El incentivo para la persona participante sería, en caso de poder resolver el problema, sentir para sí mismo algo de la genialidad del gran matemático alemán. Y para los autores, documentar el proceso. En términos generales el sujeto del experimento terminó su trabajo en un lapso de 20 días, empleando sus ratos ociosos para enfocar y resolver el problema y registrando cuidadosamente los avances a través de borradores y manuscritos y teniendo entrevistas esporádicas entre cada dos y 4 días en las que comunicaba cuáles eran sus estrategias y acciones.

En términos generales el sujeto del experimento terminó su trabajo en un lapso de 20 días, empleando sus ratos ociosos para enfocar y resolver el problema y registrando cuidadosamente los avances a través de borradores y manuscritos y teniendo entrevistas esporádicas entre cada dos y 4 días en las que comunicaba cuáles eran sus estrategias y acciones.

1a Entrevista (15/DIC/2011). Estrategia usada: *Abducción*. El sujeto optó por tabular los cuadrados de los n primeros números naturales y sumarlos para diferentes valores de n, buscando un patrón, que ayude a predecir el siguiente número a partir del actual, que sea independiente de los cuadrados de sucesivos números (ejemplo 1, 5, 14, 30, 55...). Se observa predominio de pensamiento abductivo consistente en que partiendo del hecho de que si "hay una fórmula que genere el siguiente número", entonces "hay un patrón", el sujeto se basa en el silogismo de que si aparece una regularidad entre los diferentes números, la fórmula debe de existir, luego se pueda hallar de ahí. El tipo de abducción es sígnico predictiva. El sujeto declara que aunque parece haber regularidad entre los números generados, no pudo encontrar un patrón manejable.

2a Entrevista (18/DIC/2011). Estrategia usada: *Inducción*. El sujeto ha descubierto que las diferencias entre cada uno de los sumandos aumentan en dos (Sumandos: 02=0, 12=1; 22=4, 32=9, 42=16, 52=25,.. Diferencias entre un sumando y el siguiente: 1; 3, 5, 7, 9,..). El sujeto hace la observación de que a partir de este momento, aún sin proponérselo, su trabajo sobre el problema se ha vuelto más intenso (las ideas se le manifiestan aún sin proponérselo).

Deducción Vs., Abducción e inducción (lo concluido contra lo incierto)

El enfoque del presente experimento es intrínsecamente meta cognitivo por lo que, veremos la Matemática primeramente como un fenómeno social (dinámica, en conflicto existencial y constantes construcciones), predominando pensamientos de abducción e inducción, para luego recogerse en una Ciencia (Formal, objetiva, compacta o ausente de impurezas para apropiado almacenamiento y transporte) regida por el pensamiento deductivo (así, escrita en orden opuesto a su ocurrencia), completando un ciclo, no único, en el que pasa de resolver un problema de una comunidad, hasta su preparación para ser difundido y cerrar. Entonces el problema ha sido "reducido", definiendo una estructura mínima que se codifica.

Por economía es natural que en el proceso de codificación y almacenamiento se precise prescindir de todo historial de ensayos y peripecias vividas en el camino a la solución final, dicho en otras palabras, se elimina todo vestigio de pensamiento abductivo e inductivo empleado.[1]

En este proceso no podemos hablar de un ciclo único, sino que en su trayecto, aplican en su interior, más procesos que fueron previamente reducidos. El proceso general forma un tejido que se asemeja a un fractal donde cada estructura contiene otras estructuras y sucesivamente; en su visión global (ya formado el tejido) sólo hay una forma de recorrerlo per se (la estructura pura) para que tenga sentido y es en dirección opuesta a su ocurrencia. Generalmente esto es lo que se hace cuando cerramos el proceso.

3a Entrevista (22/DIC/2011). Estrategia usada: *Inducción y luego deducción*. El sujeto busca una relación que ligue el número de sumando (1; 2, 3, 4,..) con el valor de éste (Sumandos: 0, 1; 4, 9, 16, 25,..); como ya se había indicado en la entrevista anterior, la diferencia entre un sumando y otro se incremente en 2, partiendo de 1, eso nos lleva a sumar secuencias de impares (1, 3, 5, 7,..). Llegado este punto del experimento se tomó sumo cuidado en las observaciones porque el sujeto está ante el paso de aplicar su pensamiento deductivo y traslucir de éste su accionar en retroceso que dará pauta al avance de su trabajo. El sujeto explicó: "si partiendo de un siempre primer número, al sumar impares puedo llegar secuencialmente a un sumando que es el cuadrado de un natural cualquiera, ahora el cuadrado de cualquier natural lo puedo expresar como la suma secuencial de impares". Vemos en este devenir de ideas como se cierran pequeños ciclos dentro del ciclo mayor y continuamos con la alternancia de las formas de pensamiento, ahora con el pensamiento inductivo. El sujeto argumenta: $1=1\hat{2}$; $1+3=\hat{2}2$; $1+3+5=\hat{3}2$;

[1] Para las personas que recibimos y aprendemos la Matemática Básica, sin estudiar el ciclo en su totalidad (que somos la mayoría pues lo que aprendemos se desarrolló décadas o quizá siglos antes de que naciéramos) se nos implanta cierta conciencia de que sólo el pensamiento deductivo es valioso o el único, pues finalmente es el que prevalece en las codificaciones.

1+3+5+7=4^2; 1+3+5+7+9=5^2;.. (Cuente el número de sumandos y compárelo con el número al cuadrado) "Para hallar 1^2+2^2+3^2+4^2 se suma (1)+ (1+3)+ (1+3+5)+ (1+3+5+7)". Cabe aclarar que la secuenciación de impares mencionada arriba, aunque no se expone aquí, se asegura aplicando el Principio de Inducción Matemática, por lo que hay que mencionar también de éste, que es resultado de un proceso de formalización, perteneciendo al pensamiento deductivo (su nombre no debe confundirnos) y nótese que por deducción el sujeto concluye que puede con las sumas propuestas llegar al cuadrado de cualquier natural.

4a Entrevista (23/DIC/2011). Estrategia usada: *Herramientas heurísticas*. El sujeto organiza todo lo logrado hasta aquí en un esquema que permite una visión global: Se creó una tabla, con renglones conteniendo los cuadrados de los naturales (última columna) y su suma en forma de impares, en las columnas se desarrollan el número necesario de impares que al sumarse dan el cuadrado buscado. Se complementa la tabla escribiendo en los bordes (el superior y el izquierdo) de la tabla expresiones que ayudan a hallar directamente el elemento en el cruce de renglón y columna. El esquema se presenta a continuación, ahora basta sumar la última columna para resolver el problema. Se incluye en la tabla dos últimos renglones que no aparecerán hasta la 5a entrevista, note también para ésta, las celdas vacías:

5a Entrevista (26/DIC/2011). Estrategia usada: *Inducción y abducción*. El sujeto ha encontrado por inducción algunas expresiones importantes: como las que podemos ver arriba en la tabla en los renglones 1, 2, 3,. . . ,n; que se pueden resumir así (recuerde que la manera general de representar un impar cualquiera es 2i-1 donde i=1, 2, 3. . .):

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \qquad (1)$$

Además ha vislumbrado la posibilidad de aplicar leyes conmutativas y asociativas de la adición para reducir el problema a una expresión concisa (se refiere a sumar la primera columna 1[n] luego la segunda 3[n-1], y así) planteando 1(n-0) + 3(n-1) + 5(n-2) + 7(n-3) + ... + (2n-3)2+(2n-1)1, cosa que aquí, tratada tras bambalinas, representa la recta final del problema pues al aplicarle la ley distributiva y reagrupar, por un lado nos queda n[n2] restándosele números naturales a partir de cero multiplicados cada uno por impares a partir de uno hasta completar n sustraendos, luego se expresan en notación de sumatoria se distribuyen aplicando las propiedades de las sumatorias y por un simple despeje tendríamos la suma buscada, pero, el sujeto no lo vio.

6a Entrevista (29/DIC/2011). Estrategia usada: Analogía no aclarada. El sujeto visualizó la tabla completa (continuando los patrones originales de números hasta llenar cada una de las celdas originalmente vacías y luego estableció una analogía geométrica con el área del rectángulo que forma la tabla y llega a una propuesta más simple que la simbólica que se comentó para llegar a la solución en la entrevista 5a "Si al área total le restamos el área del triángulo arriba de la diagonal

$i2(i-1)$	$2(1)-1$	$2(2)-1$	$2(3)-1$	$2(4)-1$	$2(5)-1$	...	$2(n-2)-1$	$2(n-1)-1$	$2(n)-1$	suma
1	1									1
2	1	3								4
3	1	3	5							9
4	1	3	5	7						16
5	1	3	5	7	9					25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$	1	3	5	7	9		$2n-5$			$(n-2)^2$
$n-1$	1	3	5	7	9		$2n-5$	$2n-3$		$(n-1)^2$
n	1	3	5	7	9		$2n-5$	$2n-3$	$2n-1$	$(n)^2$
suma	$1(n-0)$	$3(n-2)$	$5(n-3)$	$7(n-3)$	$9(n-4)$		$(2n-5)3$	$(2n-5)2$	$(2n-5)1$	S
	$1(n)$	$3(n)$	$5(n)$	$7(n)$	$7(n)$		$(2n-5)n$	$(2n-5)n$	$(2n-5)n$	$n(n^2)$
	$1(0)$	$3(1)$	$5(1)$	$7(1)$	$7(1)$		$(2n-5)(n-3)$	$(2n-5)(n-2)$	$(2n-5)(n-1)$	n^3-S

Tab. 1: Herramienta Heurísticas

principal quedará el área del triángulo de abajo de la diagonal" así tendremos el resultado final (esta idea lo llevó a desarrollar los 2 últimos renglones de la tabla). El área total (vea el penúltimo renglón de la tabla. El corchete es la expresión (1)):

$$n[1+3+5+7+9+..+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)] = n[n2] \tag{2}$$

Área del triángulo arriba de la diagonal principal (vea el último renglón de la tabla):

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(i-1) \tag{3}$$

Por lo que el sujeto asegura que la solución está dada por:

$$S = n^3 - \sum_{i=1}^{n}(2i-1)(i-1) \tag{4}$$

7a Entrevista (31/DIC/2011). Estrategia usada: Abducción argumental (intelecto proposicional). El sujeto espera reducir la expresión (4) a una fórmula concisa, observe que su segundo término:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i^2-2i-i+1) = \left[\sum_{i=1}^{n}2i^2 - \sum_{i=1}^{n}3i\right] + n \tag{5}$$

entonces

$$S = n^3 - 2\sum_{i=1}^{n}i^2 + 3\sum_{i=1}^{n}i - n \tag{6}$$

Además:

$$S = \sum_{i=1}^{n}i^2 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{8}$$

Sustituyendo (7) y (8):

$$S = n^3 - 2S + 3\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$3S = \frac{2}{2}n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{2}n$$

$$S = \frac{[2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n]}{6}$$

$$S = \frac{n[2n^2 + 3n + 1]}{6}$$

$$S = \frac{n[(n+1)(2n+1)]}{6}$$

Conclusión.

Aunque se usaron razones aparéntemente bien fundamentadas, no se tiene la plena seguridad de que la expresión sea correcta para todo n. A pesar de que el sujeto hizo diferentes ensayos con la fórmula hallada (nuevamente pensamiento inductivo), verificándose cada uno de ellos, el proceso encerró muchos argumentos que no fueron formalmente fijados, dejando muchos cabos sueltos, para cerrar el ciclo se tendrían que recorrer cada uno de ellos formalizándolos, se le explicó esto al sujeto, quién estuvo de acuerdo. Luego se cerró (formalizó), aplicando el Principio de Inducción Matemática, lo cual expone un aspecto importante del desarrollo de la matemática y muestra lo citado arriba cuando se habló de un paso inverso (o al revés) primero obtuvimos la expresión (caso general) luego logramos su demostración (se camina a través de implicaciones a un subcaso del general).