Sección: "EL ESPACIO FÍSICO"

Rogelio Rojas Ramos*

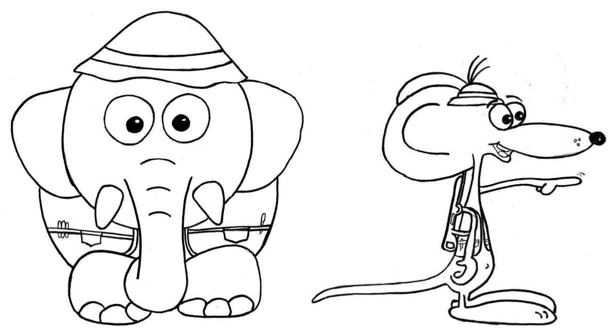
16 de diciembre de 2013

Capítulo 3: Cálculo provisional.

Antes de iniciar con este capítulo, es importante recordar que El Cálculo es sin lugar a dudas el preludio a la matemática y el primer encuentro real con la misma. Es una oportunidad inigualable de profundizar en los conceptos básicos de lógica. Y debemos dejar establecido que la precisión y el rigor son el medio natural para tratar las cuestiones matemáticas [1], de otro modo no se podría hacer un análisis profundo de las estructuras y, las propiedades de los entes abstractos serían meras suposiciones.

Las diferentes definiciones de un concepto en cálculo, corresponden a diferentes niveles de abstración y la elección de una a otra se efectúa en base a necesidades específicas [2]. El elemento importante en la matemática es el pensamiento abstracto en una forma precisa y ordenada. Las facultades de la mente, al igual que los miembros del cuerpo, se fortalecen y mejoran con el ejercicio. Este trabajo es, en realidad, un entrenamiento para comprender y asimilar (por vez primera o como reafirmación) algunos de los principales conceptos del cálculo. Se enuncia una colección de definiciones provisionales que en su conjunto tienen la finalidad de servir en la generación de las definiciones formales del cálculo, puede considerarse entonces como una herramienta didáctica.

En este trabajo no pretendemos presentar las definiciones formales del cálculo, ni un análisis riguroso de sus consecuencias, más bien, es un material que presenta los conceptos en una forma intuitiva,



eludiendo la dificultad en su uso, pero manteniendo la seriedad en sus alcances y la suficiencia para desarrollar el cálculo, sin sacrificar el rigor lógico. Debido a la gran importancia de los conceptos y a la dificultad de muchos al estudiarlas, los protagonistas de esta sección (el elefante y el ratón), antes de partir a un safari nos dejaron las siguientes:

Definiciones provisionales

Un *número natural* o de contar es un símbolo que denota una característica intrínseca e inalienable a un conjunto de objetos, llamada cantidad. Al conjunto de esos símbolos se denomina *sistema numérico*, que puede tener infinitos símbolos o unos pocos, si el sistema numérico es posicional (i.e. el orden de los símbolos importa). Los *números enteros* son los mismos números naturales como "haber," como "deber," y un símbolo que denota ausencia. Los *números racionales* son proporciones de números enteros, y son necesarios otros números que no son proporciones de números enteros, conocidos como *irracionales*. En conjunto, todos estos números

*Catedrático: Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Tehuacan

son llamados *números reales*, pero para dar una definición satisfactoria de ellos, debemos definir no solo los números reales, sino también las operaciones de suma y multiplicación de números reales. Es decir, los números reales serán concebidos en base a las propiedades que satisfacen y no como entes aislados. Sin esta concepción, un número real solo sería una ficción heurística de nuestra imaginación matemática.

¿Qué són entonces los números reales? En realidad no es de interés, son importantes porque satisfacen doce "propiedades básicas" llamadas de campo, asociadas a dos operaciones definidas. Las cuatro primeras se refieren a la operación suma, otras cuatro para la multiplicación, una más que relaciona ambas operaciones y las tres propiedades restantes hacen referencia a desigualdades. De estas propiedades se derivan dos restricciones para los números reales: i) no división por cero, ii) no extracción de raíz cuadrada de números negativos.

Una *función* es una relación en la que a cada elemento de un conjunto se le asigna uno y solo un elemento de otro conjunto. Al primer conjunto se le denomina *dominio* de la función y al segundo *imagen*. Los conjuntos de interés en cálculo son conjuntos de números reales. La relación entre los elementos de los conjuntos puede estar especificada de varias formas: con palabras, con una fórmula, con una gráfica, con un listado, etc.

A partir de este momento nos referiremos a un elemento del conjunto del dominio como un punto. Señalamos que existe una diferencia abismal entre dos conceptos tan necesarios para el cálculo: el primero es el *valor de la función* $f(x_0)$ en un punto x_0 que es el valor asignado por la relación a dicho punto; el segundo es el *valor al que tiende la función* en un punto (mejor conocido como límite de la función en un punto) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ que es el valor que tomaría la función en ese punto debido a los puntos aledaños a él[1].

[1]debido a los valores asignados por la relación a esos puntos aledaños

El valor de la función y el valor al que tiende la función, en un punto, no siempre coinciden. Una función es *continua en un punto* si el valor de la función y el valor al que tiende la función en ese punto existen y son iguales. Y, una *función contínua* es una función que es contínua en todos los puntos de su dominio.

La *derivada de una función en un punto* es el valor al que tiende el cociente de la variación de valor de la función en el punto y la variación del punto, cuando no existe variación.

Esta última definición no resultó tan fácil de entender, previniendo esta complicación, nuestro amigo el elefante ha ideado algo verdaderamente ingenioso para asimilarlo. En cierto establecimiento de leguminosas encontramos una lista de ofertas en los precios del maní (primeras dos columnas, la tercera y cuarta son creaciones de su mente)

x	$f(x)$	h	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
1	12	-3	11.33
2	23	-2	11.50
3	34	-1	12.0
4	46	0	
5	58	1	12.0
6	60	2	7.00
7	72	3	8.66
8	84	4	9.50

Donde x representa el número de Kilogramos de maní y $f(x)$ el precio de x kilogramos de maní.

Como nuestro amigo paquidermo solo necesita 4 kilogramos de maní para su consumo (su paladar es muy exigente). En la columna tres, h representa el número de kilogramos extra de maní que ha decidido consumir (o dejar de consumir si h es negativa). Es importante hacer notar que la columna cuatro no representa el precio promedio por kilogramo, revisemos con cuidado: 9.50 representa el precio por kilogramo extra de maní, si consumimos 4 kilogramos extra de maní; 8.66 representa el precio por kilogramo extra de maní, si consumimos 3 kilogramos extra de maní; 7 representa el precio por kilogramo extra de maní, si consumimos 2 kilogramos extra de maní; 12 representa el precio por kilogramo extra de maní si consumimos 1 kilogramo extra de maní;

¿Cuál será el precio por kilogramo extra de maní cuando consumimos 0 kilogramos extra de maní? Es claro que no podemos calcularlo con la función dada en la cuarta columna (y la pregunta quiza no tenga sentido para algunos roedores) pero también es claro que, de existir,[2] debería haber tomado el valor de 12. Es decir, no sabemos cual es el valor de la función (que depende de h, no de x) en $h = 0$, pero si podemos calcular el valor al que tiende esa función en $h = 0$. Ésto último es la definición de derivada, el valor que debió haber tomado el precio por kilogramo extra de maní, cuando los kilogramos extra son cero.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada representaría el precio por Kilogramo extra de maní, cuando no consumimos algún kilogramo extra de maní.

Como comentario final la derivada no existe en los puntos en los que la función no es continua, ni en aquellos donde la función tiene “picos”.

[1] M. Spivak; *Calculus*(Fourth Edition); Publish or Perish, Inc. Texas USA (2008).

[2] Madrid de la Vega H.; *Un bosquejo del desarrollo histórico de funciones; Departamento de Matemáticas, Facultad de ciencias, UNAM (1978) No. 36.*

[2]Empleando valores continuos de x el resultado puede ser diferente

.

Si una cantidad no negativa fuera tan pequeña que resultara menor que cualquier otra dada, ciertamente no podríá ser sino cero. A quienes preguntan qué es una cantidad infinitamente pequeña en matemáticas, nosotros respondemos que es, de hecho, cero. Así pues, no hay tantos misterios ocultos en este concepto como se suele creer. Esos supuestos misterios han convertido el cálculo de lo infinitamente pequeño en algo sospechoso para mucha gente.

Leonhard Euler