VACIADO DE UN RECIPIENTE DE FORMA CILÍNDRICA USANDO ECUACIONES DIFERENCIALES.

Alicia Romualdo Feliciano[1], Yolanda Ruiz Benítez[1].
[1] Ingeniería Industrial
Instituto Tecnológico de Tehuacán

Palabras clave: flujo de agua con cal, Ecuaciones diferenciales.

Resumen

En el presente artículo se mostrara la aplicación de ecuaciones diferenciales en el caso de un recipiente de forma cilíndrica que contiene (160 ml. de agua y 5 gr. de cal) que se vacía a través de un agujero en la parte inferior del recipiente se reportan los resultados experimentales de este fenómeno y con ellos se obtiene el valor del parámetro c, propuesto en el modelo de Torricelli donde c está en función de la viscosidad respectivo a ese medio.

Introducción:

El vaciado de un recipiente de forma cilíndrica con un agujero en el fondo representa un caso importante que aparece en aplicaciones de la industria donde el flujo de líquidos acumulados en recipientes para abastecer necesidades desde las mas complejas como la producción hasta las mas básicas como tomas de agua o sanitarios, en los cuales podría ser necesario llevar un control en base a los tiempos de vaciado y la relación de volumen a lo largo de la jornada laboral.

DESARROLLO.

Consideraremos un depósito de forma cilíndrica y supondremos que el agua sale de por un orificio circular de área A_K en su fondo. Cuando el agua sale por el orificio, la fricción y la contracción de la corriente cerca del orificio reducen el volumen de agua que sale del depósito por segundo a $cA_K\sqrt{2gh}$, donde $c(0<c<1)$ es una constante empírica. Determinaremos la ecuación diferencial para la altura h del agua en el instante t para el depósito que se muestra en la fig. 1. El radio del orificio es de 1.5 mm y el radio del recipiente es 2.7cm, consideraremos la gravedad como $g = 9.8\ {}^{m}\!/_{seg^2}$

Primero demostraremos la Ley de Torricelli y que es la expresión $v=\sqrt{2gh}$

Donde v es la velocidad de salida del fluido.

Esta expresión se origina al igualar la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, con la energía potencial, mgh, donde despejaremos v.

Igualando la energía cinética y la energía potencial nos queda.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

Se despeja v^2 y $\frac{1}{2}m$ pasa al segundo miembro dividiendo y eliminamos a m.

$v^2 = \frac{\cancel{m}gh}{\frac{1}{2}\cancel{m}}$ obteniéndose $v^2 = \frac{\frac{1}{1}gh}{\frac{1}{2}}$

Obtenemos de la raíz en ambos miembros de la ecuación $v^2 = 2gh$

La expresión para la velocidad de salida del fluido $v = \sqrt{2gh}$

Ahora consideraremos la ecuación diferencial que gobierna al bote, el volumen del agua en el recipiente en el instante t es $V(t) = A_w h = \pi r^2 h$ en donde r es el radio del recipiente cilíndrico.

Expresando el área transversal del recipiente en función del radio $r : \mathrm{A_w} = A(r) = \pi r^2$

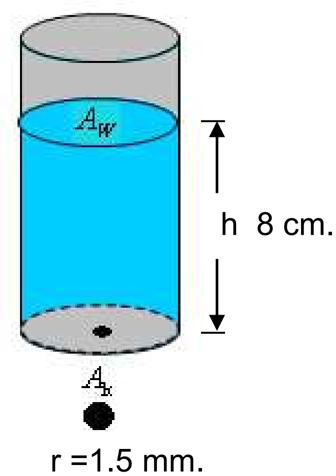

Fig. 1 Forma del recipiente y sus dimensiones.

Con esta ecuación $Vol(t) = A_w h = \pi r^2 h$ podemos plantear una ecuación diferencial entre la altura y el tiempo en el que disminuye el volumen de agua en el recipiente de forma cilíndrica:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{cA_k}{A_W}\sqrt{2gh} = -\frac{cA_k}{\pi r^2}\sqrt{2gh}$$

Con esto, hemos definido una ecuación diferencial en base a los parámetros del recipiente, A_K, r, h, g, c. Calcularemos unos valores que se pueden determinar para solucionar particularmente esta ecuación.
Asignando a continuación los valores calcularemos el área del agujero que esta en la parte inferior del recipiente:

$$A_k = \pi r^2$$

$$A_k = \pi(0.15)^2 = 0.0225\pi cm$$

Ahora calcularemos el área de A_w del recipiente de forma cilíndrica.

$$A_W = \pi r^2$$
$$= \pi(2.7)^2$$
$$= 7.29\pi cm$$

La gravedad es igual a:

$$g = 9.8\, {}^{m}\!/\!_{seg^2}$$

Sustituiremos estos valores en la ecuación diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{cA_k}{A_W}\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{cA_k}{A_W}\sqrt{2g}dt$$

Sustituyendo.

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{c0.0225\pi}{7.29\pi}\sqrt{2(9.8)}dt$$

Se multiplica 9.8 por 2 y se elimina π .

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{c0.0225\cancel{\pi}}{7.29\cancel{\pi}}\sqrt{19.6}dt$$

Obtenemos la raíz de 19.6.

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.0225c}{7.29}4.4272dt$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.0996c}{7.29}dt$$

Así obtenemos que.

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -0.0137cdt$$

Ahora resolveremos la ecuación diferencial usando el método de variables separables.

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -0.0137cdt$$

Se integran estas dos funciones.

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -0.0137c\int dt$$

Se reescribe la función de h quedando $h^{-1/2}$

$$\int h^{-1/2}dh = -0.0137c\int dt$$

Desarrollo de la integral en función de h.

$$\frac{h^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \frac{h^{1/2}}{1/2} = 2h^{1/2}$$

De esta manera obtenemos.

$$2h^{1/2} = -0.0137ct + k$$

Ahora obtendremos los valores experimentales para k y c de la ecuación.

$$2h^{1/2} = -0.0137ct + k$$

Sustituiremos el valor de h y t con los valores de la tabla experimental número 1, siguientes h=5.5 y h=2.4, obteniendo.

$$2(5.5)^{1/2} = -0.0137c(7) + k$$

$$5.5 = -0.0959c + \mathrm{k}$$

Sustituiremos el valor de h y t con los valores de la tabla experimental.

$$2(2.4)^{1/2} = -0.0137c(21) + k$$

$$2.4 = -0.2877c + k$$

Resolveremos el sistema de ecuaciones usando determinantes

$$-0.0959c + k = 5.5$$

$$-0.2877c + k = 2.4$$

$$\Delta = -0.0959(1) - (1)(-0.2877) = 0.1918$$
$$\Delta_c = 5.5(1) - (1)(2.4) = 3.1$$
$$\Delta_{\mathrm{k}} = -0.0959(2.4) - (5.5)(-0.2877) = 1.3522$$
$$c = \frac{3.1}{0.1918} = 16.1627$$
$$\mathrm{k} = \frac{1.3522}{0.1918} = 7.0501$$

Grafica de k y c.

T	H
7.1	8
5.5	5.5
4	3. 8
2.4	2.4
0.9	1.2
0.7	0.5
2.2	0

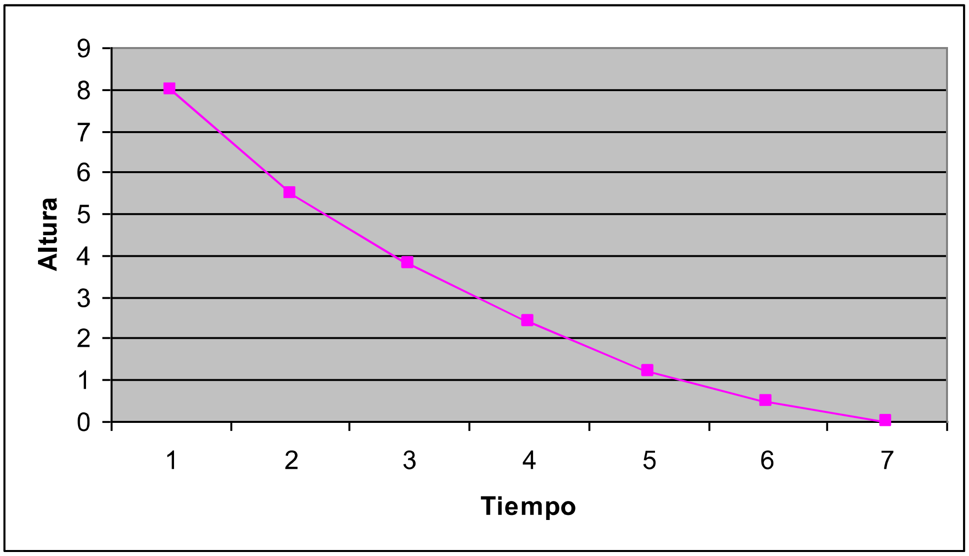

Fig. 2. Grafica de la solución analítica obtenida.

Datos Experimentales:

Realización del experimento del vaciado de un recipiente de forma cilíndrica.

Calcular el tiempo que tarda un recipiente con capacidad de 160 ml. de agua y 5 gr. de cal en vaciarse a través de un orificio en la parte inferior.

Medidas del recipiente:

Altura: 8 cm

Radio del recipiente $A_W = 2.7$ cm.

Radio del orificio 0.15cm.

Tiempo que tarda en vaciarse= 42 seg.

Lectura cada 7 seg. T	Disminución H
0	8
7	5.5
14	3. 8
21	2.4
28	1.2
35	0.5
42	0

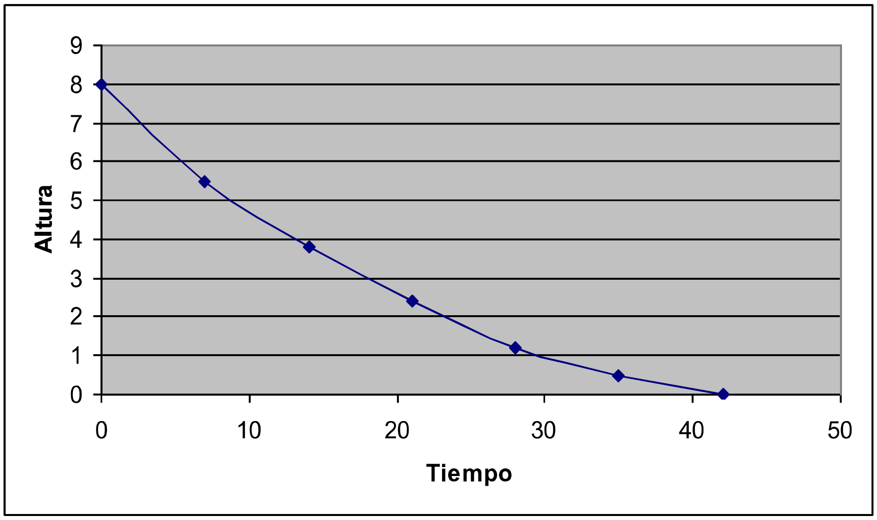

Fig. 3. Datos experimentales

Conclusión.

Se requiere de un cierto conocimiento en el tema de las ecuaciones diferenciales para saber resolver el problema del vaciado de un recipiente cilíndrico, conteniendo agua y cal. Esto ayuda a poder comprender la interrelación teoría matemática de las ecuaciones diferenciales, con una aplicación específica, y se calculo el valor de la constante c=16.6 constante que identifica a la solución calina.

AGRADECIMIENTOS.

Agradecemos a los compañeros Edgar Girón Ramírez, Amador Duarte Balderas, Mary Greny Álvarez Ramírez, Kevin Zequeira Velásquez, Kenia Isabel Cano Méndez, Marco Antonio Frías Vázquez, Iceberg Blanco Montalvo y Misael Velazco Hernández, quienes dieron el soporte en el que nos apoyamos para este trabajo.

Bibliografía.

M. Braun, Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones.
Editorial: Grupo Editorial Iberoamérica.

L. Elsgoltz, Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional.
Editorial: MIR.

Ricardo Faro Rivas, Ecuaciones Diferenciales.
Editorial: Universidad de Extremadura.

Murrya R. Spiegel, Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.
Editorial: Prentice Hall.

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/dinamica/vaciado/vaciado.htm