APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A UN CIRCUITO RLC CON FUENTE DE MEDIA ONDA

Daza Dorantes Pavel Andrés, Martin Alberto Pacheco Armas

José Alberto Montaño Flores, Manuel Antonio Cruz Leyva

Julio Cesar Camarillo Feria

INSTITUTO TECNOLOGICO DE TEHUACAN

INGENIERIA EN MECATRONICA

Palabras clave: circuito RLC, aplicaciones con transformada de Laplace

RESUMEN

En este articulo se analiza un circuito RLC con transformada de Laplace, esta se aplica a la ecuación diferencial que describe el comportamiento del voltaje en el circuito.La Transformada de Laplace es una herramienta muy poderosa para la resolución de circuitos. La ecuación diferencial que esta en el dominio del tiempo mediante la Transformada de Laplace pasa al dominio de la frecuencia, efectuando las respectivas operaciones algebraicas luego aplicando la Transformada Inversa de Laplace obtenemos la respuesta en el domino del tiempo.

INTRODUCCION

La Transformada de Laplace es muy útil en el campo de los sistemas de control, automatización en procesos.En el estudio de los procesos es necesario considerar modelos dinámicos, es decir, modelos de comportamiento variable respecto al tiempo. Esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferencialespara representar matemáticamente el comportamiento de un proceso en el tiempo.

El comportamiento dinámico de los procesos en la naturaleza puede representarse de manera aproximada por el siguiente modelo general de comportamiento dinámico lineal:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n - 1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} \dots\dots\dots\dots + a_0 y(t) = x(t)$$

La transformada de Laplace permite resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas con lo cual se facilita su estudio.

Una vez que se ha estudiado el comportamiento de los sistemas dinámicos, se puede proceder a diseñar y analizar los sistemas de control de manera simple.

¿Cómo controlar un proceso mediante la trasformada de Laplace?Para diseñar un sistema de control automático, se requiere:
Conocer el proceso que se desea controlar, es decir, la ecuación diferencial que describe su comportamiento, utilizando las leyes físicas, químicas y/o eléctricas.A esta ecuación diferencial se le llama modelo del proceso.

DESARROLLO

Resolveremos mediante la transformada de Laplace el circuito RLC que se muestra en la figura 1.

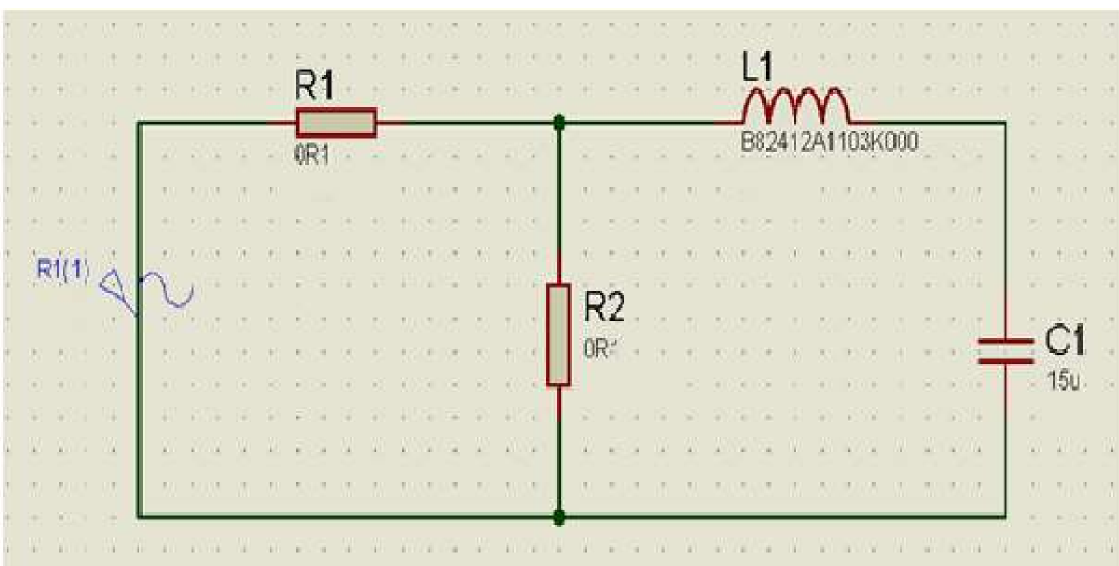

Figura 1. Circuito a considerar

Para obtener el voltaje del mencionado circuito tenemos:

$V(t) = I_1(R_1 + R_2) - I_2R_2$

Una vez obtenido el voltaje ahora procederemos a la igualación de las corrientes:

$I_1 = I_2 + I_3$

Procediendo por nodos:

$I_{1=\frac{V-V_A}{R_1}}$

$$I_2 = \frac{V_A}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{1}{L}\int V_A dt + \frac{cdV_A}{dt}$$

Sustituyendo en I_1, I_2, I_3

$$\frac{V - V_A}{R_1} + \frac{R}{L}\int V_A dt + \frac{cdV_A}{dt} V = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R}{L}\int V_A dt + R\frac{cdV_A}{dt} + V_A$$

Ahora despejaremos el voltaje:

$$V(t) = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R}{L}\int V_A dt + RC\frac{dV_A}{dt} + V_A$$

Procederemos con la aplicación de la transformada de Laplace y tendremos:

$$\frac{1}{s(1 + e^{-as})} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R}{LS} V_A(s) + RCSV_A(s) + V_A(s)$$

Resolviendo por mallas:

$V = I_1(R_{1+}R_2) - I_2R_2$………. (1)

$$0 = R_2(R_2 + C) - I_2C$$

$$0 = I_2(R_2C) - I_1R_2$$

DespejamosI_2

$$I_2 = \frac{I_1 R_2}{R_2 + C} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Después sustituimos ecuación 2 en 1

$$V = I_1(R_1 + R_2) - \frac{I_1 R_2}{R_2 + C}$$

Resolviendo la resta tenemos:

$$V = \frac{I_1(R_I + R_2)(R_2 + C) - I_1 R_2^2}{R_2 + C}$$

Resolvemos el binomio y tendremos la siguiente ecuación:

$$V = \frac{R_1 + R_2 + R_2 + C - R_2^2}{R_2 + C}$$

$$V = \frac{I_1(R_1 + 2R_2 + R_2^2 + C)}{R_2 + C}$$

$$V = \frac{I_1(R_1 C + R_1 R_2 + R_2^2 + R_2 C - R_2^2)}{R_2}$$

Ahora factor izaremos el resultado obtenido:

$$V = \frac{I_1(R_1 C + R_1 R_2 + R_2 C)}{R_2 + C}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \frac{I_1(s)(R_1\,C\ +\ R_1R_2\ +\ R_2\,C)}{R_2 +\ C}$$

$$\frac{1}{s(1+\ e^{-as})} = \frac{I_1(s)\left(R_1\left(\frac{1}{s\cdot C}\right)\ +\ R_1R_2\ +\ R_2\left(\frac{1}{s\cdot C}\right)\right)}{R_2 + \left(\frac{1}{s\cdot C}\right)}$$

CONCLUSIONES

Tenemos que unaecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva.

El aplicar la transformada de Laplace en la solución de las ecuaciones diferenciales procedentes del circuito propuesto resulto muy ilustrativo como ejercicio de curso.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al MC. José Enrique Salinas Carrillo por el apoyo brindado en la elaboración de este trabajo por compartir sus conocimientos adquiridos a lo largo de su trayectoria profesional. Así mismo damos las gracias a los lectores que pudieron degustar este ejercicio de pensamiento esperando lo hayan disfrutado.

BIBLIOGRAFIA

Ogata, Dinámica de sistemas, Editorial Santillana

Ogata, Ingeniería en control, Editorial Trillas