APLICACIONES DE TRASFORMADA DE LAPLACE A UN CIRCUITO ELÉCTRICO RLC

Anzurez Olaya David, Roque Arellano Álvaro, Paz Sosa Julio

Jasso Rodríguez Eric, Quiahua González Jesús

Ingeniería Mecatrónica

INSTITUTO TECNOLOGICO DE TEHUACAN

Palabras Clave: Propiedades de la Transformada de Laplace, Circuito RLC, Matrices y Ondas.

RESUMEN

En este artículo se presenta el estudio de la determinación de las corrientes en un circuito RLC con fuente sinusoidal rectificada de onda completa, en el cual se procede en primera instancia a determinar la función de la fuente sinusoidal rectificado para posteriormente aplicar la técnica de la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones diferenciales de las corrientes en el circuito y de esta manera darle solución.

INTRODUCCION

Un circuito RLC es un circuito cuyos componentes son resistencias, bobinas y capacitores; estos tres elementos tienen por ecuación característica una relación lineal (Sistema lineal) entre tensión e intensidad. Se dice que no hay elementos activos. De forma que para conocer el funcionamiento de un circuito se procede, aplicando las leyes de Kirchoff, a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales para determinar la tensión e intensidad en cada una de las ramas. Como este proceso se hace extremadamente laborioso, cuando en un circuito hay más de dos bobinas o condensadores, en la práctica, se recurre a desarrollar las ecuaciones del circuito y después resolverlas a través del uso de la Transformada de Laplace, en la que derivadas e integrales son sumas y restas con números complejos, resolver un sistema de ecuaciones lineales complejo y luego aplicar la Antitransformada de Laplace, y finalmente, devolver el producto al dominio del tiempo.

Tomando en cuenta lo anterior se determinara la ecuación del circuito RLC para determinar las corrientes que circulan en las 2 mallas del circuito aplicando la transformada de Laplace en conjunto con la teoría de matrices para determinar las incógnitas de las ecuaciones diferenciales.

DESARROLLO

En la figura 1 se muestra el circuito RCL, donde se puede apreciar dos resistencia, una bobina y un capacitor.

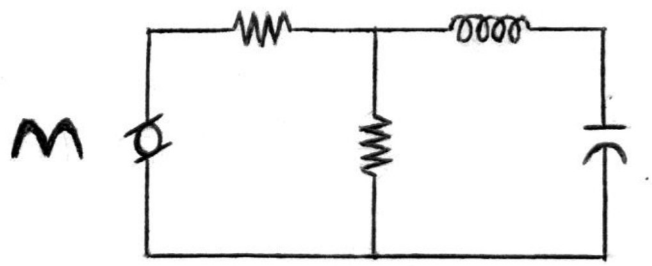

Figura 1. Circuito RLC con dos mallas considerado

En la figura 2 se muestra la grafica de onda sinusoidal rectificada completa del circuito donde:

V_p = Voltaje pico

T = Tamaño del ciclo

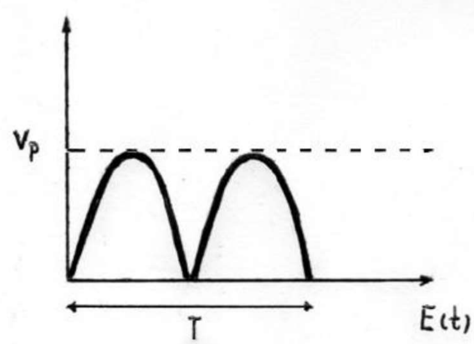

Figura 2

La función de dicha onda es E(t) …

$$\boldsymbol{E(t) = V_p \left|\sin \frac{2\pi t}{T}\right|}$$

Mediante las leyes de Kirchoff obtenemos las ecuaciones que definen a dicho circuito …

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$E(t) = i_1 R + i_2 R$$

$$0 = -i_2 R + \frac{q_3}{C} + \frac{di_3}{dt} L$$

Cabe destacar que dentro de dicho sistema de ecuaciones tenemos …

$$q_3 = \int_0^t i_3 dt$$

Por lo tanto nuestro sistema de ecuaciones queda de la siguiente forma …

$$0 = -i_1 + i_2 + i_3$$

$$V_p \left| \sin \frac{2\pi t}{T} \right| = i_1 R + i_2 R$$

$$0 = -i_2 R + \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt + \frac{di_3}{dt} L$$

Ahora bien hacemos una matriz con en el anterior sistema de ecuaciones …

$$\begin{vmatrix} -i_1 & i_2 & i_3 \\ i_1 R & i_2 R & 0 \\ 0 & -i_2 R & \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt + \frac{di_3}{dt} L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ V_p \left| \sin \frac{2\pi t}{T} \right| \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ahora a dicho juego de matrices se le aplica Transformada de Laplace …

Quedándonos …

$$\begin{vmatrix} -I_1(s) & I_2(s) & I_3(s) \\ I_1(s) R & I_2(s) R & 0 \\ 0 & -I_2(s) R & \frac{1}{C} \frac{I_3(s)}{s} + L(I_3(s) + i_3(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{V_p}{Ts^2} - \frac{V_p e^{-Ts}}{s(1 - e^{-Ts})} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Lo cual también equivale a …

$$\begin{vmatrix} -I_1(s) & I_2(s) & I_3(s) \\ I_1(s) R & I_2(s) R & 0 \\ 0 & -I_2(s) R & I_3 \left(\frac{1}{Cs} + L \right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{V_p}{Ts^2} - \frac{V_p e^{-Ts}}{s(1 - e^{-Ts})} \\ -i_3(0) \end{vmatrix}$$

A lo anteriormente obtenido se puede simplificar de la siguiente manera …

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R & R & 0 \\ 0 & -R & \left(\frac{1}{Cs}+L\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{V_p}{Ts^2} - \frac{V_p e^{-Ts}}{s(1-e^{-Ts})} \\ -i_3(0) \end{vmatrix}$$

Ahora procedemos a obtener los valores de las corrientes I_1, I_2 e I_3 …

Para lo cual se procede a hacer el siguiente despeje …

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R & R & 0 \\ 0 & -R & \left(\frac{1}{Cs}+L\right) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{V_p}{Ts^2} - \frac{V_p e^{-Ts}}{s(1-e^{-Ts})} \\ -i_3(0) \end{vmatrix}$$

Auxiliandonos del software Mathcad obtenemos el valor de la siguiente inversa …

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R & R & 0 \\ 0 & -R & \left(\frac{1}{Cs}+L\right) \end{vmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R & R & 0 \\ 0 & -R & \left[\left(\frac{1}{Cs}\right)+L\right] \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{Cs\cdot L+1}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} & \frac{Cs\cdot L+Cs\cdot R+1}{2\cdot R+Cs\cdot R^2+2\cdot Cs\cdot L\cdot R} & \frac{Cs}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \\ \frac{Cs\cdot L+1}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} & \frac{Cs\cdot L+1}{2\cdot R+Cs\cdot R^2+2\cdot Cs\cdot L\cdot R} & -\frac{Cs}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \\ \frac{Cs\cdot R}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} & \frac{Cs}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} & \frac{2\cdot Cs}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \end{pmatrix}$$

Posteriormente se hace el producto de la matriz inversa obtenida anteriormente.

$$\begin{pmatrix} -\frac{Cs\cdot L+1}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} & \frac{Cs\cdot L+Cs\cdot R+1}{2\cdot R+Cs\cdot R^{2}+2\cdot Cs\cdot L\cdot R} & \frac{Cs}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \\ \frac{Cs\cdot L+1}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} & \frac{Cs\cdot L+1}{2\cdot R+Cs\cdot R^{2}+2\cdot Cs\cdot L\cdot R} & -\frac{Cs}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \\ \frac{Cs\cdot R}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} & \frac{Cs}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} & \frac{2\cdot Cs}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{Vp}{Ts^{2}}\right)-\left[\frac{\left[Vp\left(e^{-Ts}\right)\right]}{s\left[1-\left(e^{-Ts}\right)\right]}\right] \\ -I \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)\cdot(Cs\cdot L+Cs\cdot R+1)}{2\cdot R+Cs\cdot R^{2}+2\cdot Cs\cdot L\cdot R}-\frac{Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \\ \frac{Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2}+\frac{\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)\cdot(Cs\cdot L+1)}{2\cdot R+Cs\cdot R^{2}+2\cdot Cs\cdot L\cdot R} \\ \frac{Cs\cdot\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2}-\frac{2\cdot Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)\cdot(Cs\cdot L+Cs\cdot R+1)}{2\cdot R+Cs\cdot R^{2}+2\cdot Cs\cdot L\cdot R}-\frac{Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \\ \frac{Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2}+\frac{\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)\cdot(Cs\cdot L+1)}{2\cdot R+Cs\cdot R^{2}+2\cdot Cs\cdot L\cdot R} \\ \frac{Cs\cdot\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2}-\frac{2\cdot Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \end{bmatrix}$$

Y asi finalmente obtnenemos los valores de las corrientes del circuito RLC

$$\begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)\cdot(Cs\cdot L+Cs\cdot R+1)}{2\cdot R+Cs\cdot R^{2}+2\cdot Cs\cdot L\cdot R}-\frac{Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \\ \frac{Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2}+\frac{\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)\cdot(Cs\cdot L+1)}{2\cdot R+Cs\cdot R^{2}+2\cdot Cs\cdot L\cdot R} \\ \frac{Cs\cdot\left(\frac{Vp}{Ts^{2}}-\frac{Vp\cdot e^{-Ts}}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\right)}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2}-\frac{2\cdot Cs\cdot I}{2\cdot Cs\cdot L+Cs\cdot R+2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

CONCLUSIONES

A través de la aplicación de la transformada de Laplace, en el análisis de circuitos eléctricos, podemos determinar las corrientes que circulan en las mayas de un circuito RLC con fuente sinusoidal rectificado con cualesquiera valores de resistencia, inductancia y capacitancia.

De esa manera obtenemos una ecuación general para la onda dada, con corriente en función del voltaje.

La aplicación de la transformada de Laplace es de gran utilidad en los circuitos eléctricos, ya que, de no hacer uso de este método el desarrollo se vuelve largo y tedioso, por lo que es posible cometer errores en el desarrollo de la solución del circuito, pero ésto es solo un ejemplo de la utilidad de las aplicaciones de la transformada de Laplace.

En la ingeniería mecatrónica, la base fundamental para la solución de problemas es la matemática, y dentro del análisis, es común encontrar algunos problemas en donde se requiera aplicar integrales, derivadas o cualquier método necesario para la solución, sin embargo también las ecuaciones diferenciales juegan un papel muy importante, y de igual manera no se puede dejar de considerar a la transformada de Laplace como un conocimiento aplicable; con el cual podemos partir para definir nuevos conceptos tomando como base los ya establecidos. Al igual se hace uso de la teoría de ecuaciones que consideramos de gran ayuda en la solución de muchos problemas que pueden enfocarse tanto a la ingeniería o a la vida cotidiana.

AGRADECIMIENTOS

A nuestros padres que mediante el apoyo incondicional que se nos brindan nos es posible seguir estudiando.

A nuestros amigos de la universidad que gracias a ellos recibimos la motivación para seguir adelante tomando en cuenta que tenemos de ellos un apoyo integral como compañeros.

Para el MC. José Enrique Salinas Carrillo en especial pues gracias a sus enseñanzas impartidas durante el curso fue posible la realización de este articulo que dentro de la carrera de ingeniería Mecatrónica consideramos de suma importancia (la aplicación de las ecuaciones diferenciales, y en especial de la transformada de Laplace).

A todos y a cada uno de ellos nuestros sinceros agradecimientos.

BIBLIOGRAFIA

- Boylestad. Introducción al Análisis de Circuitos. 10ª Ed. Prentice Hall.
- ZillCullens, Differential Equations. 5ª Ed. Editorial Schawn.
- Zaldivar Cruz, Luis Ángel, (2004). Ecuaciones Diferenciales ITT.