SOLUCIÓN DE UN CIRCUITO LCR POR MEDIO DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Martínez Romero Carlos, Sánchez Ortigoza Miguel Ángel,

García Filio Jonathan, Pacheco Barbosa Christian.

Ingeniería Mecatrónica.

Instituto Tecnológico de Tehuacán.

Palabras clave: Laplace, Ecuación diferencial, Circuito.

RESUMEN

En el presente trabajo aplicamos la Transformada de Laplace para la solución de un circuito eléctrico que contiene componentes inductivo y capacitivo en dos mallas. El circuito está alimentado por una fuente que proporciona una onda periódica de tipo cuadrada. Se reporta la solución del circuito expresando las corrientes en cada elemento.

INTRODUCCION

Analicemos primero la ecuación de la forma de la onda que es suministrada al circuito. La forma de onda aparece en la figura 1. Un circuito LRC es aquel que contiene bobinas, resistencias y capacitores.

La señal E(t) se llama cuadrada y tiene periodo T=2T$_o$ en el intervalo $0 \leq t < T$, E(t) se puede definir mediante

$$E(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < 1T \\ 0, 1T \leq t < 2T \end{cases}$$

Y fuera del intervalo mediante $f(t+2) = f(t)$.

Transformada de una señal periódica

Si f(t) es continua en partes por$(\mathbf{0}, \infty)$del orden exponencial y de periodo T, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sT} f(t) dt$$

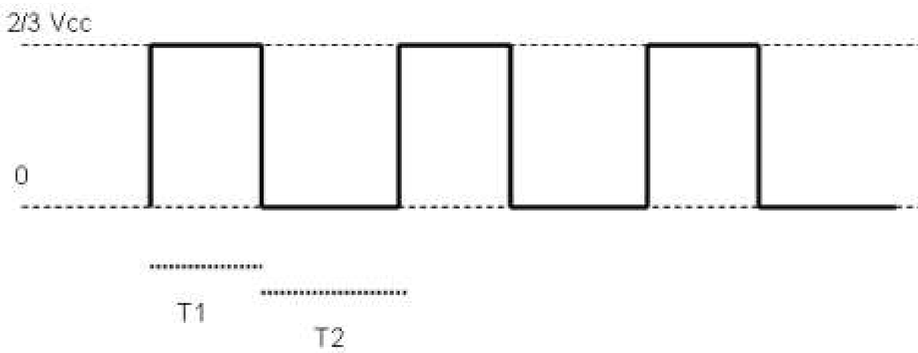

Figura 1- Forma de onda cuadrada

Resolvemos entonces

$$\mathcal{L}\{E(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}E(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}\cdot 1dt + \int_1^2 e^{-st}\cdot 0dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\frac{1-e^{-s}}{s} \leftarrow 1-e^{-2s} = (1+e^{-s})(1-e^{-s})$$

$$= \frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

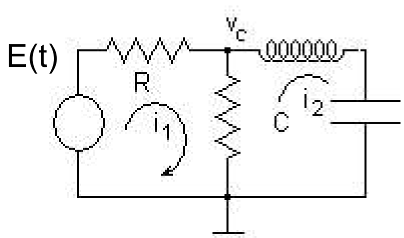

Figura 2- Circuito LCR

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan al circuito que son las siguientes:

$$\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E$$

$$E(t)\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0$$

Sujeta a$i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$

Al aplicar la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema y simplificar. Se obtiene

$$sI_1 + RI_2(s) = \frac{V}{s}$$

$-200I_1(s) + (s + 200)I_2(s) = 0$

Donde $I_1(s) = \mathcal{L}\{i_1(t)\} e I_2(s) = \mathcal{L}\{i_2(t)\}$ Resolviendo el sistema para $I_1 e I_2$ y descomponiendo los resultados en fracciones parciales y otorgando valores a los elementos del circuito

$$E(t) = V, \;\; L = h, \;\; R = \Omega, \;\; C =$$

$$I_1(s) = \frac{s + L}{s(s+R)^2} = \frac{h/s}{s} - \frac{h/s}{s+l} - \frac{s}{(s+l)^2}$$

$$I_2(s) = \frac{L}{s(s+l)^2} = \frac{h/s}{s} - \frac{h/s}{s+l} - \frac{r}{s(s+s)^2}$$

Al sacar la transformada de Laplace inversa se encuentra que las corrientes son

$$i_1(t) = \frac{h}{s} - \frac{h}{s}e^{-t} - rte^{-t}$$

$$i_2(t) = \frac{h}{s} - \frac{h}{s}e^{-t} - rte^{-t}$$

Conclusiones

Observe que tanto $i_1(t) como i_2(t)$ del ejemplo tiende hacia el valor $E/R = \frac{h}{s} cuando t \to \infty$ ademas puesto que la corriente por el capacitor es $i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = rte^{-t}$se observa que $i_3(t) \to 0$cuando$t \to 0$

Agradecimientos

Queremos destacar y agradecer el asesoramiento del M.C Salinas Carrillo José Enrique y por su oportuna participación en el tema TRANSFORMADA DE LA PLACE APLICADO A RLC.

Bibliografía:

Dennis G. Zill, Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera.

Zaldívar Cruz Luis Ángel, Notas de Matemáticas V,2009.