CIRCUITO RLC CON FUENTE DE ONDA MEDIO DIENTE DE SIERRA

Alejo Florencio Cantú Lechuga, Saúl Mauro Hernández,

Vicente Paniagua Torres, Ramón AmayoVentura,

Luz Bianey Martínez Palestino

Ingeniería Mecatrónica

Instituto Tecnológico de Tehuacán

Palabras clave:

Función de medio diente de sierra, Transformada de Laplace, circuito RLC.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un circuito RCL, con dos mayas y una fuente de media onda diente de sierra. Determinamos las ecuaciones que rigen el circuito para las corrientes. Se reporta la solución del circuito a través de la transformada de Laplace.

INTRODUCCIÓN

Como ingenieros mecatrónicos debemos ser capaces de realizar cálculos adecuados, que nos permitan conocer con precisión los valores deseados de utilidad en el diseño y análisis de los circuitos.

El circuito RLC que trataremos aparece en la figura 1, es un circuito que tiene una fuente onda medio diente de sierra que combina la resistencia pura óhmica con la reactancia generada por el capacitor y la bobina, los cuales a demás de tener una resistencia pura poseen una resistencia adicional que varía con las condiciones a las cuales se someten. Dichas resistencias denominadas reactancia capacitiva en el caso del capacitor y reactancia inductiva en el caso de la bobina, nos muestran la resistencia que opone el circuito a los cambios en la corriente y el voltaje respectivamente. Estas resistencias son consideradas imaginarias y generan un desfase en las corrientes y voltajes senoidales, este efecto solo se presenta en circuitos con ondas variables en el tiempo.

DESARROLLO

En la figura 1 considerado se muestra (a) la forma de onda que alimenta al circuito y los elementos que lo conforman, así como el arreglo físico que sostienen (b).

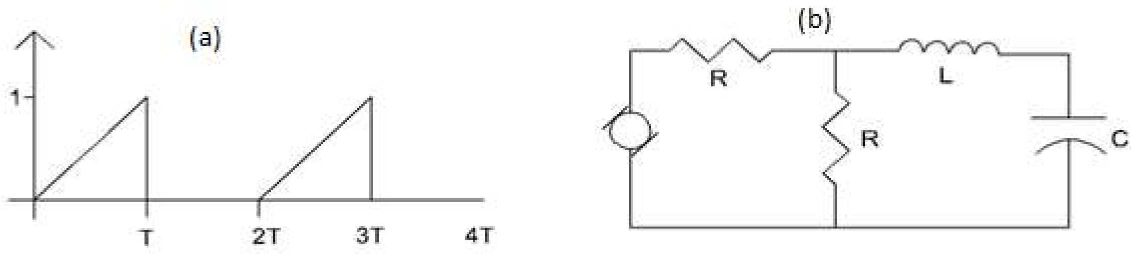

Figura 1. El circuito RLC el cual está formado por elementos reactivos y puros, es una configuración mixta serie-paralelo con una fuente de onda medio diente de sierra en el tiempo. Se muestra la onda aplicada al circuito.

Determinaremos la transformada de Laplace de la función que corresponde a la onda de medio diente de sierra que es la que alimenta al circuito según se muestra en la figura 1. Utilizaremos el teorema en el que las funciones periódicas tienen transformada de Laplace.

La onda de medio diente de sierra en la figura 1 es una función periódica puesto que se repite en el tiempo y posee un periodo 2T.

La función se puede definir en el intervalo 0≤ t < 2T como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} V_p t & 0 \leq t < T \\ 0, & T \leq t < 2T \end{cases}$$

Tomando fuera del intervalo, y definiendo de la siguiente manera:

$$f(t) + 2T = f(t)$$

Por el teorema de la transformada de una función periódica (Apartado 1) se tiene que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-st}} \int_0^t e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} 0 dt \right]$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1-e^{-s}}{s^2} \right] = \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-2s})}$$

El resultado en la ecuación anterior se puede obtener sin necesidad de integrar, aplicando el 2º teorema de traslación si definimos:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{V_p t}{T}, & 0 \le t < T \\ 0, & T \le t < 2T \end{cases}$$

Entonces $f\,(t)$ en el intervalo $\{0, T\}$ pero podemos expresar g con términos de una función escalar unitaria, en forma $g(t) = \, t - t\mu(t+T)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{v_p}{v_p - e^{-Ts}}\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$= \frac{v_p}{v_p - e^{-T}}\mathcal{L}\left\{t - t\mu(t - v_p)\right\}$$

$$= \frac{v_p}{v_p - e^{-TS}}\left[\frac{v_p}{S^T} - \frac{1}{S^T}e^{-T} - 6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right]$$

La anterior ecuación es la Transformada de Laplace de la función de la onda de diente de sierra.

Una vez teniendo la transformada de Laplace, procederemos a encontrar las ecuaciones de él circuitos dando por consiguiente las siguientes ecuaciones:

$0 = -i_1 + i_2 + \frac{dq_3}{dt}$ ---------------------------------- ecuación nodo 1

$v(t) = R \;\; i_1 + Ri_2$ ------------------------------------- ecuación malla 1

$0 = Ri_2 + \frac{q_3}{C} + \frac{dq_3}{dt^2}$ ----------------------------- ecuación malla 2

Ahora aplicaremos la transformada de Laplace a las ecuaciones de nodo y mallas encontradas

$$0 = -I_1(s) + I_2(s) - sQ_3(s) - q_3$$

$$\frac{v_p}{v_p - e^{-TS}}\left[\frac{v_p}{S^T} - \frac{1}{S^T}e^{-T} - 6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right] = RI_1(s) + RI_2(s)$$

$$0 = RI_2(s) + \frac{q_{3(0)}}{C} - S^2 Q_3(S) - Sq_3(0) - q_3(0)$$

Si reagrupamos las ecuaciones para separar de un lado las incógnitas $I_1(s), I_2(s), q_3$ tenemos que:

$-sQ_3(s) = -I_1(s) + I_2(s) - q_3$ ------------------------------ ecuación 1

$\frac{v_p}{v_p - e^{-TS}}\left[\frac{v_p}{S^T} - \frac{1}{S^T}e^{-T} - 6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right] = RI_1(s) + RI_2(s)$ ------------- ecuación 2

$-S^2 Q_3(S) = RI_2(s) + \frac{q_{3(0)}}{C} - Sq_3(0) - q_3(0)$ ----------------- ecuación 3

Procederemos a agrupar los términos de lado derecho en un matriz como paso principal para determinar las corrientes utilizando el método de la matriz inversa:

$\begin{bmatrix} -I_1(s) + I_2(s) + sQ_3(s) - q_3(0) \\ RI_1(s) + RI_2(s) + 0 \\ 0 + RI_2(s) + Q_3(s)\left(\frac{1}{c} + S^2\right) \end{bmatrix}$ ------------------------------ matriz D

Si separamos las incógnitas para determinas soluciones tenemos que

$$\begin{bmatrix} -I_1(s) + I_2(s) + sQ_3(s) - q_3(0) \\ RI_1(s) + RI_2(s) + 0 \\ 0 + RI_2(s) + Q_3(s)\left(\frac{1}{c} + S^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & S \\ R & R & 0 \\ 0 & R & \frac{1}{c} + S^2 \end{bmatrix}$$

De lo anterior obtenemos la matriz A que es la siguiente:

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & S \\ R & R & 0 \\ 0 & R & \frac{1}{C} + S^2 \end{bmatrix}$ --------------------------------- matriz A

Determinando la inversa de A tenemos que:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S^3+1}{2S^3 - RS^2 + 2} & \frac{S^3 - RS^2 + 1}{2Rs^3 - R^2S^2 + 2R} & \frac{S^2}{2S^3 - RS^2 + 2} \\ \frac{S^3+1}{2S^3 - RS^2 + 2} & \frac{S^3+1}{2Rs^3 - R^2S^2 + 2R} & -\frac{S^2}{2S^3 - RS^2 + 2} \\ \frac{RS}{2S^3 - RS^2 + 2} & -\frac{S}{2S^3 - RS^2 + 2} & \frac{2S}{2S^3 - RS^2 + 2} \end{bmatrix}$ ------------------- matriz inversa de A

Tomando los términos de lado derecho de las ecuaciones 1, 2, 3 armamos la matriz I:

$$\begin{bmatrix} q_3(0) \\ \frac{1}{v_p - e^{-TS}}\left[\frac{v_p}{S^T} - \frac{1}{S^T}e^{-T} - 6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right] \\ q_3(0)(S-1) \end{bmatrix}$$ ---------------------------------- matriz I

Si multiplicamos la matriz I por la matriz A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{S^3+1}{2S^3-RS^2+2} & \frac{S^3-RS^2+1}{2Rs^3-R^2S^2+2R} & \frac{S^2}{2S^3-RS^2+2} \\ \frac{S^3+1}{2S^3-RS^2+2} & \frac{S^3+1}{2Rs^3-R^2S^2+2R} & -\frac{S^2}{2S^3-RS^2+2} \\ \frac{RS}{2S^3-RS^2+2} & -\frac{S}{2S^3-RS^2+2} & \frac{2S}{2S^3-RS^2+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3(0) \\ \frac{1}{v_p - e^{-TS}}\left[\frac{v_p}{S^T} - \frac{1}{S^T}e^{-T} - 6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right] \\ q_3(0)(S-1) \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidos los resultados de la multiplicación de matrices nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{S^3+1}{2S^3-RS^2+2}\right)q_3(0) + \left[\frac{S^3-RS^2+1}{2RS^3-R^2S^2+2R}\right]\left[\frac{1}{v_p-e^{TS}}\left(\frac{v_p}{S^T}-\frac{1}{S^T}e^{-T}-6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right)\right] + \left[\frac{S^2}{2S^3-RS^2+2}\right][q_3(0)(S-1)]$$

$$\left(\frac{S^3+1}{2S^3-RS^2+2}\right)q_3(0) + \left[\frac{S^3+1}{2RS^3-R^2S^2+2R}\right]\left[\frac{1}{v_p-e^{TS}}\left(\frac{v_p}{S^T}-\frac{1}{S^T}e^{-T}-6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right)\right] - \left[\frac{S^2}{2S^3-RS^2+2}\right][q_3(0)(S-1)]$$

$$\left(\frac{RS}{2S^3-RS^2+2}\right)q_3(0) - \left[\frac{S}{2S^3-RS^2+2}\right]\left[\frac{1}{v_p-e^{TS}}\left(\frac{v_p}{S^T}-\frac{1}{S^T}e^{-T}-6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right)\right] - \left[\frac{2S}{2S^2-RS^2+2}\right][q_3(0)(S-1)]$$

Simplificando:

$$\left(\frac{2S^3-5+1}{2S^3-RS^2+2}\right)q_3(0) + \left[\frac{S^3-RS^2+1}{2RS^3-R^2S^2+2R}\right]\left[\frac{1}{v_p-e^{TS}}\left(\frac{v_p}{S^T}-\frac{1}{S^T}e^{-T}-6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right)\right]$$

$$\left(\frac{S^2+1}{2S^3-RS^2+2}\right)q_3(0) - \left[\frac{S^3+1}{2RS^3-R^2S^2+2R}\right]\left[\frac{1}{v_p-e^{TS}}\left(\frac{v_p}{S^T}-\frac{1}{S^T}e^{-T}-6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right)\right]$$

$$\left(\frac{S^3-2S^2+2S+1}{2S^3-RS^2+2}\right)q_3(0) - \left[\frac{S}{2S^3-RS^2+2}\right]\left[\frac{1}{v_p-e^{TS}}\left(\frac{v_p}{S^T}-\frac{1}{S^T}e^{-T}-6\frac{v_p}{S}e^{-S}\right)\right]$$

Una vez realizados los cálculos previos obtenemos los valores de la corriente y la carga del capacitor siguiente:

$$i_1 = \frac{{V_p}^2 e^T (R+1)(6te^{T+1} - e^{-T} + 1)}{Rt(V_P - e^t)(R-4)}$$

$$i_2 = \frac{e^T ({V_P}^2 - V_p e^T - te^{2T} q_3(o) + 6t{V_p}^2 e^{T+1} + tV_p e^T q_3(0)}{t(V_P - e^T)(R-4)}$$

$$q_3 = \frac{e^T ({V_P}^2 - V_p e^T - 6t{V_p}^2 e^{T+1} - Rte^{2T} q_3(o) + RtV_p e^T q_3(0)}{Rt(V_P - e^T)(R-4)}$$

CONCLUSIONES:

La solución del problema por medio de la implementación de las transformadas de Laplace y las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de los elementos que posee el circuito se llego a la conclusión de que los elementos, su comportamiento es regido por las ecuaciones diferenciales y se logró demostrar que éstas cumplen para el circuito propuesto

AGRADECIMIENTOS

A DIOS por permitirnos haber llegado hasta este momento y haber terminado el semestre.

A nuestros padres y familiares que nos apoyan para continuar con nuestros estudios y poder realizarnos como profesionistas trabajo que realizamos día a día.

A nuestros profesores que día a día están con nosotros compartiendo sus conocimientos y en este caso al Doctor Enrique Salinas por el apoyo que nos ha brindado en este curso de matemáticas V. También a los demás profesores de matemáticas por los conocimientos previos adquiridos en semestres anteriores.

A nuestros compañeros que nos apoyan día con día, por todo eso y más gracias.

BIBLIOGRAFÍA

Herman Betz, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Editorial Harla

Daniel A. Marcus, Ecuaciones diferenciales, EditorialCecsa

Ecuaciones diferenciales modernas, Editorial Serie Schaum,

Notas del Dr. Luis Ángel Zaldívar Cruz, Matemáticas V

J. David Irwin, Análisis de circuitos en ingeniería, Editorial Pearson

Apartado 1

Teorema de la Transformada de una función periódica.

Utilizaremos el teorema mencionado para encontrar la transformada de Laplace para la función periódica de la señal de alimentación del circuito. El cual se enuncia a continuación:

Si f (t) es continua por tramos en {0, ∞} de orden exponencial y periódica con periodo T

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-st}} \int_0^t e^{-st} f(t)dt$$