CIRCUITO RLC DE 2 MALLAS CON FUENTE TRIANGULAR PERIODICA

Toxpa Olivier Miguel, Hernández Carrera César Daniel

INGENIERIA MECATRONICA

INSTITUTO TECNOLOGICO DE TEHUACAN

PALABRAS CLAVE

Aplicaciones de la trasformada de Laplace, Fuente triangular continúa.

RESUMEN

En este artículo presentamos la determinación de las corrientes en un circuito RLC con fuente triangular continua con dos mallas, en él determinamos la función de la fuente triangular continua general y posteriormente aplicamos el método de transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de las corrientes en el circuito, de la misma manera, aplicamos la teoría de matrices necesaria para llegar a la expresión final de las corrientes.

INTRODUCCION

El circuito RLC que presentamos tiene una combinación de una resistencia con reactancia generada por los dos elementos reactivos, tomando en cuenta que el capacitor y la bobina que además de su resistencia por naturaleza presentan una resistencia adicional la cual varía de acuerdo al tiempo y a otros factores a las que éste está sometido.

El circuito RLC que presentamos consta de una fuente con onda triangular continua con reactancia que de acuerdo a su definición presentan una oposición a la variación de la señal en función del tiempo, esto a su vez origina un desfasamiento en la señal de salida. Todo esto es presentado mediante estudio de ecuaciones diferenciales y Transformada de Laplace, mediante ellas podemos determinar las corrientes que circulan en las dos mallas del circuito.

DESARROLLO

Definiremos la función triangular continua de la fuente del circuito RLC

La figura 1 muestra la grafica de la función triangular continua de la fuente del circuito RLC la cual será analizada a continuación:

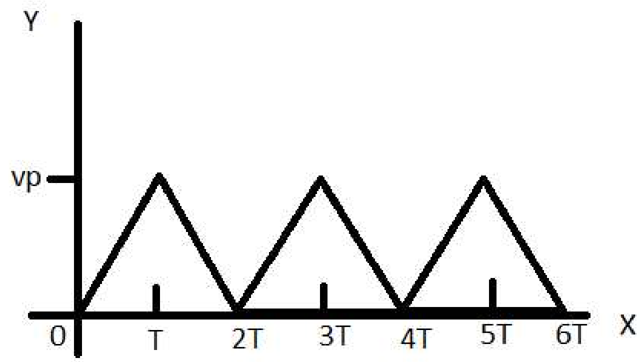

Fig 1. Onda triangular continua con periodo 2T.

Para hallar la función matemática de la fuente utilizaremos la transformada de Laplace la cual la tenemos definida en el anexo 1 de este articulo.

Determinaremos la función de la fuente con onda triangular continua.

La función se puede definir en el intervalo $0 \leq t \leq 2T$

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{v_p}{T}, & 0 \leq t < T \\ \dfrac{v_p}{T}(2T - t)\,, & T \leq t < 2T \end{cases}$$

Fuera del intervalo mediante $f(2T - t) = f(t)$ con un periodo $2T$ tenemos entonces:

Aplicando la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{2T} e^{-st} f(t)$$

$$= \frac{v_p}{v_p - e^{-2s}} \left[\int_0^T te^{-st} dy + \int_T^{2T} (2-t)e^{-st} dt \right]$$

$$= \frac{v_p}{v_p - e^{-st}} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \right]$$

$$= \frac{v_p}{v_p - e^{-2s}} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} \right]$$

$$= \frac{v_p}{v_p - e^{-2s}} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} \right]$$

Hacemos el cambio de variables de la transformada de la función de la fuente donde:

Tenemos entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{v_p}{v_p - e^{-ts}} \left[\frac{v_p}{s^t} + \frac{e^{-ts}}{s^t} - \frac{2e^{-s}}{s^t} \right]$$

Consideremos el circuito RLC de la figura 2 con 2 mallas y fuente de onda triangular continua.Definiremos a continuación las ecuaciones que rigen las corrientes en el circuito de la figura anterior (Fig 2).

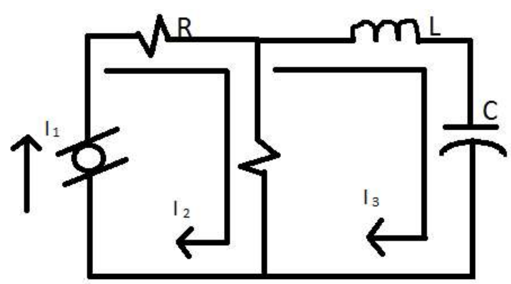

Fig2. Circuito RLC con fuente triangular continua de 2 mallas.

La ecuación de la malla 1 es:

$$0 = I_1 + I_2 + \frac{dq_3}{dt} \; (Ecuación\ Malla\ 1)$$

$$\frac{v_p}{v_p - e^{-2s}}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2}\right] = RI_1 + RI_2 \ (Ecuación\ Malla\ 2)$$

$$0 = RI_2 + \frac{q_3}{c} + \frac{d^2q_3}{dt^2} \ (EcuaciónMalla\ 3)$$

Hallaremos las transformadas de laplace de las ecuaciones anteriores quedando de la siguiente manera:

$-sQ_3(s) = -I_1(s) + I_2(s) - q_3$ Ecuación 1

$\frac{v_p}{v_p - e^{-2s}}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2}\right] = RI_1(s) + RI(s)$ Ecuación 2

$-S^2Q_3(S) = RI_2(s) + \frac{q_{3(0)}}{c} - Sq_3(0) - q_3(0)$ Ecuación 3

Determinaremos a continuación las corrientes I_1, I_2, I_3 para lo cual utilizaremos la teoría de matriz.

Determinamos entonces la matriz de la solución de las ecuación 1,2,3 quedando de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -I_1(S) + & I_2(S) + & SQ_3(S) \\ RI_1(S) + & RI_2(S) + & 0 \\ 0 + & RI_2(S) + & Q(S)\left(\frac{1}{c} + S^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \\ I_3(S) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & S \\ R & R & 0 \\ 0 & R & \frac{1}{C} + S^2 \end{pmatrix} MATRIZA$$

Proponemos entonces la matriz inversa de A (A^{-1}) quedando de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{S^3+1}{2S^3 - RS^2 + 2} & \frac{S^3 - RS^2 + 1}{2RS^3 - R^2S^2 + 2R} & \frac{S^2}{2S^3 - RS^2 + 2} \\ \frac{S^3+1}{2S^3 - RS^2 + 2} & \frac{S^3+1}{2RS^3R^2S^2 + 2R} & -\frac{S^2}{2S^3 - RS^2 + 2} \\ \frac{RS}{2S^3 - RS^2 + 2} & -\frac{S}{2S^3 - RS^2 + 2} & \frac{2S}{2S^3 - RS^2 + 2} \end{pmatrix}$$

Haremos la multiplicación de la matriz B por la inversa de la matriz A, quedando entonces:

$$\begin{pmatrix} q_3(0) \\ \dfrac{v_p}{v_p - e^{-ts}}\left[\dfrac{v_p}{s^t} + \dfrac{e^{-ts}}{s^t} - \dfrac{2e^{-s}}{S^t}\right] \\ q_3(0)(s-1) \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \\ I_3(S) \end{pmatrix}$$

El siguiente procedimiento fue realizado por el programa Mathcad.

Desarrollando la multiplicación de las matrices de A^{-1} por B:

$\left(\frac{S^3+1}{2S^3-RS^2+2}\right) q_3(0) + \left(\frac{s^3-RS^2+1}{2RS^3R^2S^2+2R}\right)\left(\frac{1}{vp-e^{-ts}}\left[\frac{vp}{s^t} + \frac{e^{-ts}}{s^t} - \frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)+\left(\frac{S^2}{2S^3-RS^2+2}\right)(q_3(0)(s-1))$

$\left(\frac{S^3+1}{2S^3-RS^2+2}\right) q_3(0) + \left(\frac{S^3+1}{2RS^3R^2S^2+2R}\right)\left(\frac{1}{vp-e^{-ts}}\left[\frac{vp}{s^t} + \frac{e^{-ts}}{s^t} - \frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)-\left(\frac{S^2}{2S^3-RS^2+2}\right)[q_3(0)(s-1)]$

$\left(\frac{RS}{2S^3-RS^2+2}\right) q_3(0) - \left(\frac{S}{2S^3-RS^2+2}\right)\left(\frac{1}{vp-e^{-ts}}\left[\frac{vp}{s^t} + \frac{e^{-ts}}{s^t} - \frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)-\left(\frac{2S}{2S^3-RS^2+2}\right)(q_3(0)(s-1))$

Reduciendo los términos semejantes de las expresiones tenemos:

$$\left(\frac{2S^3-S-1}{2S^3-RS^2+2}\right) q_3(0) + \left[\frac{s^3-RS^2+1}{2RS^3-R^2S^2+2R}\right]\left(\frac{1}{vp-e^{-ts}}\left[\frac{vp}{s^t} + \frac{e^{-ts}}{s^t} - \frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)$$

$$\left(\frac{S^2+1}{2S^3-RS^2+2}\right) q_3(0) - \left[\frac{S^3+1}{2RS^3-R^2S^2+2R}\right]\left(\frac{1}{vp-e^{-ts}}\left[\frac{vp}{s^t} + \frac{e^{-ts}}{s^t} - \frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)$$

$$\left(\frac{S^3-2S^2+2S+1}{2S^2-RS^2+2}\right) q_3(0) - \left(\frac{S}{2S^3-RS^2+2}\right)\left(\frac{1}{vp-e^{-ts}}\left[\frac{vp}{s^t} + \frac{e^{-ts}}{s^t} - \frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)$$

De esa manera obtenemos la solución de la matriz obteniendo las corrientes I_1, I_2, I_3.

Por lo tanto, las expresiones reducidas a su menor expresión quedan de la siguiente manera:

$$\left(\frac{2S^3-S-1}{2S^3-RS^2+2}\right)q_3(0)+\left[\frac{s^3-RS^2+1}{2RS^3-R^2S^2+2R}\right]\left(\frac{1}{v_p-e^{-ts}}\left[\frac{v_p}{s^t}+\frac{e^{-ts}}{s^t}-\frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)$$

$$\left(\frac{S^2+1}{2S^3-RS^2+2}\right)q_3(0)-\left[\frac{S^3+1}{2RS^3-R^2S^2+2R}\right]\left(\frac{1}{v_p-e^{-ts}}\left[\frac{v_p}{s^t}+\frac{e^{-ts}}{s^t}-\frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)$$

$$\left(\frac{S^3-2S^2+2S+1}{2S^2-RS^2+2}\right)q_3(0)-\left(\frac{S}{2S^3-RS^2+2}\right)\left(\frac{1}{v_p-e^{-ts}}\left[\frac{v_p}{s^t}+\frac{e^{-ts}}{s^t}-\frac{2e^{-s}}{S^t}\right]\right)$$

Tomando como herramienta importante el programa Mathcad y realizando las operaciones adecuadas por el mismo, tenemos las corrientes de la siguiente manera:

$$i_1=\frac{{V_p}^2e^T(R+1)(2te^{T+1}-e^{-T}+1)}{Rt(V_P-e^{-T})(R-1)}$$

$$i_2=\frac{e^T({V_P}^2-V_pe^T-te^{2T}q_3(o)+2t{V_p}^2e^{T+1}+tV_pe^Tq_3(0)}{t(V_P-e^{-T})(R-1)}$$

$$q_3=\frac{e^T({V_P}^2-V_pe^T-2t{V_p}^2e^{T+1}-Rte^{2T}q_3(o)+RtV_pe^Tq_3(0)}{Rt(V_P-e^{-T})(R-1)}$$

CONCLUSIONES

Mediante la aplicación de la transformada de Laplace en el análisis de circuitos eléctricos pudimos determinar las corrientes que circulan en las mallas de un circuito RLC con fuente triangular continua con cualesquiera valores de resistencia, inductancia y capacitancia.

Con respecto a la fuente obtuvimos la función de la fuente de voltaje con onda triangular continua en donde aplicamos la Transformada de Laplace, la cual consideramos de gran utilidad en los circuitos eléctricos, para determinar corrientes y en la aplicación de muchos problemas en circuitos.

Las matemáticas son la base fundamental para la solución de problemas en el análisis de los circuitos eléctricos, donde aplicamos las ecuaciones diferenciales, las cuales juegan un papel muy importante para la determinación de las soluciones a las ecuaciones.

AGRADECIMIENTOS:

Los autores agradecemos, al MC. José Enrique Salinas Carrillo quien graciasa su dirección fue posible el estudio que presentamos en este articulo.

A nuestros padres que mediante el apoyo incondicional que nos brindan, nos es posible seguir estudiando.

A nuestros amigos de la universidad, ya que gracias a ellos recibimos la motivación para seguir adelante tomando en cuenta que tenemos de ellos un apoyo integral como compañeros.

ANEXO 1

Teorema de la Transformada de Laplace de funciones periódicas:

Si $f(t)$ es continúa en trozos y de orden exponencial en el intervalo $[0,+\infty)$, si $f(t)$ es periódica con periodo T entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int e^{-st} f(t) dt$$

BIBLIOGRAFIA

Boylestad John Carl, Introducción al Análisis de Circuitos, 10th Ed. Siglo XX1

James ZillCullens, Differential Equations, 5th Ed Nueva Era

Luis Ángel Zaldivar Cruz, Ecuaciones Diferenciales.

Frank Ayres, Jr. Ecuaciones Diferenciales, Serie Schawn.